ШКОЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

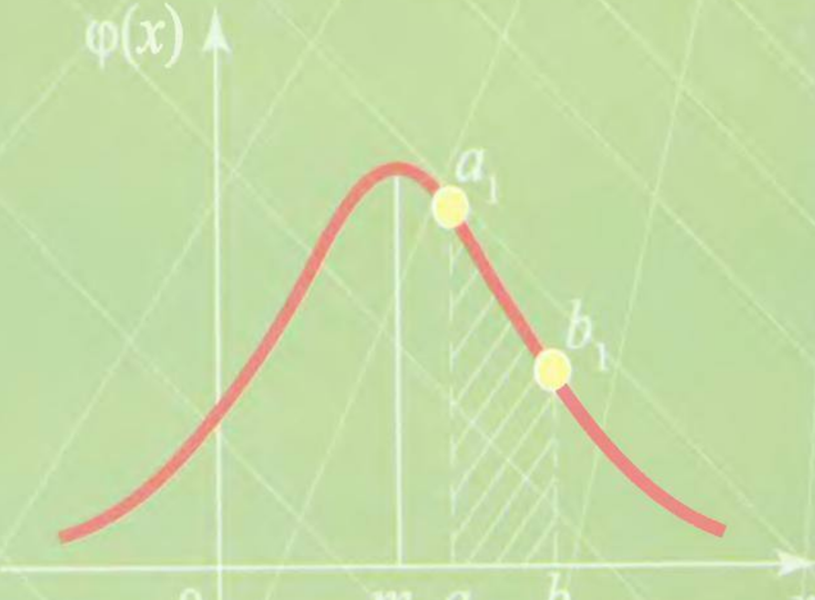
В помощь учителю

И.Л. БРОДСКИЙ, О.С. МЕШАВКИНА

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

10–11 классы

ПЛАНИРОВАНИЕ И ПРАКТИКУМ



Аркти

ШКОЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

И.Л. БРОДСКИЙ
О.С. МЕШАВКИНА

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

10–11 классы

Планирование и практикум

Пособие для учителя

издательство Аркти
МОСКВА
2009

УДК 519.2
ББК 74.262
Б88

Рецензент:
Локоть Н.В. — кандидат физико-математических наук, доцент

Бродский И.Л., Мешавкина О.С.
Б88 Вероятность и статистика. 10–11 классы. Планирование и практикум: Пособие для учителя. — 104 с.; ил. (*Школьное образование*)

ISBN 957-5-89415-561-0

Пособие предназначено для учителей математики, впервые преподающих курс теории вероятностей и математической статистики в старших классах общеобразовательной средней школы. Оно может быть использовано также для преподавания в классах с углубленным изучением предмета.

УДК 519.2
ББК 74.262

ISBN 978-5-89415-561-0

Содержание

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для учителей математики, впервые преподающих курс теории вероятностей и математической статистики в старших классах общеобразовательной средней школы. Курс рассчитан на 20 учебных часов и ориентирован на минимум содержания, предусмотренный Федеральным компонентом Госстандарта. Пособие содержит также ряд тем, предназначенных для классов с углубленным изучением математики (отмечены звездочкой). Данные темы могут дополнять основной курс по выбору учителя и в соответствии с бюджетом времени.

Структура пособия традиционна, каждая тема предваряется кратким изложением основных определений, формулировок теорем и формул, за которыми следуют собственно задачи, образующие практикум.

Основным методическим отличием, как представляется авторам, является доминирование индуктивных приемов изложения материала. Все теоретические положения опираются на примеры, которые играют решающую роль в преподнесении материала на уроке, без опоры на учебник. Примеры во многих случаях предшествуют формулировкам определений. Такой методики придерживаются также авторы учебника [1].

Еще одна методическая особенность данного пособия состоит в том, что решения всех упражнений вынесены в конец книги. Предполагается, что читатель решает задачу самостоятельно, после чего сверяет свое решение с нашим.

Доказательства теорем и вывод формул читатель может найти в книгах, содержащихся в списке использованной литературы. В качестве основных при этом рекомендуются пособия [13], [4] и [6].

Изучение курса предполагается в 10 классе, однако, может быть, по усмотрению школы, разложено на 10 и 11 классы, а также полностью перенесено на 11 класс.

Авторы благодарны рецензенту книги, Наталье Васильевне Локоть, за ценные советы, а также Федоровой Елизавете Сергеевне и Аладьину Евгению Игоревичу — за помощь в подборе материала для пособия.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 183038, г. Мурманск, ул. Подстаницкого, 1 МОИПКРО, Бродскому Исаю Лазаревичу.

Программа и почасовое планирование раздела «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики» (20 часов)

№ п/п	Название темы		Содержание темы	Часов для изучения	Всего часов
1	Множества и операции над ними	Теория	Понятие множества, элемент множества, способы задания множеств, классификация множеств по количеству элементов (конечные, бесконечные, пустые), подмножество, равные множества, операции над множествами (объединение, пересечение, разность), правила суммы (для пересекающихся и непересекающихся множеств), правило умножения, изображение множеств (диаграммы Эйлера — Венна)	1	3
		Практика	Тема 1, упражнения № 1, 2, 3 (а, б), 4 (а), 6, 7 (а), 8 (б), 9	2	
2	Комбинаторика	Теория	Виды соединений – сочетания, размещения, перестановки (определения и правила вычисления), факториал (определение и правило вычисления), связь между представленными видами соединений (таблица 2.3.3)	2	4
		Практика	Тема 2.1, упражнения № 1, 3, 4; тема 2.2, упражнения № 2, 3 (а), 4 (2); тема 2.3, упражнения № 1, 3, 5. Дополнительные упражнения (к разделу соединения без повторений). упражнения № 1, 2, 4, 6	2	

3	Событие и вероятность	Теория	Стохастический опыт, исходы опыта (события), виды событий: достоверные/невозможные, равновозможные, несовместимые/совместимые, элементарные, противоположные; полная группа событий, классическое определение вероятности (определение, формула для вычисления), свойства вероятности события	1	2
		Практика	Тема 3, упражнения № 1, 3, 4, 5 (б, г), 7, 10, 12	1	
4	Теоремы умножения	Теория	Определения: независимые/зависимые события, попарно-независимые события, условная вероятность, произведение двух и нескольких событий; теорема о вероятности произведения двух зависимых событий, теорема о вероятности произведения двух независимых событий	1	2
		Практика	Тема 4, упражнения № 1, 2, 3	1	
5	Теоремы сложения	Теория	Определения: сумма двух и нескольких событий: совместимые и несовместимые события были даны в теме 3, теорема о вероятности суммы двух несовместимых событий, теорема о вероятности суммы двух совместимых событий	1	2
		Практика	Тема 5, упражнения № 2, 3	1	

Окончание

6	Связь между теоремами сложения и умножения	Теория	Схема применения теорем в зависимости от условия задачи	—	1
		Практика	Тема 6, упражнения № 1, 3	1	
7	Три замечательные формулы	Теория	Формула полной вероятности, формула Байеса, формула Бернулли	0,5	2
		Практика	Тема 7, упражнения № 2, 3; тема 8, упражнения № 1, 2 (б), 3; тема 9, упражнения № 1, 2	1,5	
8	Случайная величина и ее распределение	Теория	Случайная величина, закон распределения случайной величины, дискретная/непрерывная случайная величина, частота абсолютная и относительная, полигон и гистограмма частот	1	2
		Практика	Тема 11, упражнения № 2, 4; тема 12, упражнения № 1, 2	1	
9	Основные характеристики рядов данных	Теория	Вариационный ряд, выборка, размах. Медиана, мода, среднее значение, математическое ожидание, отклонение от среднего значения, дисперсия, среднее квадратическое отклонение	1	2
		Практика	Все упражнения для тем 13 и 14	1	
Всего:		Теория		8,5	20
		Практика		11,5	

Тема 1. Множества

Множество является первичным понятием математики (как «точка», «прямая» или «плоскость» в геометрии) и потому не определяется. Однако его можно представить как совокупность некоторых объектов (предметов), объединенных по определенному общему признаку. Объекты, из которых состоит множество, называются **элементами** множества.

Пример: а) множество — аквариум с элементами — аквариумные рыбки; б) множество цифр десятичной нумерации (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и т.д.

Для обозначения множества используют большие латинские буквы (A, B, C). Задать множество можно одним из следующих способов:

1) перечислением всех его элементов в фигурных скобках: $A = \{5, 4, 7\}$;
2) описанием общего свойства его элементов: X — множество корней квадратного уравнения: $x^2 + 2x = 0$.

По количеству элементов множества бывают **конечными** (количество элементов можно указать), **бесконечными** (невозможно указать количество элементов) и **пустыми** (обозначается символом $\varnothing$).

Примеры: а) множество горошин в стручке (конечное множество); б) множество точек на отрезке [0;1] числовой оси (бесконечное множество); в) множество отрицательных чисел на отрезке [0;1] числовой оси (пустое множество).

Множество B называется **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества B является также и элементом множества A.

Обозначение: $B \subset A$.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример: Даны четыре множества: $A = \{5, 4, 7\}$, $K = \{7, 5\}$, $B = \{4, 3\}$, $C = \varnothing$. Здесь: $K \subset A$ ($A \supset K$), $B \not\subset A$, $C \subset A$ ($A \supset C$).

Множества A и B называются **равными**, если они состоят соответственно из одинаковых элементов.

Обозначение: $A = B$.

Пример: $A = \{5, 4, 7\}$, $M = \{7, 5, 4\}$. $A = M$.

Над множествами можно выполнять определенные операции. Рассмотрим основные из них:

Пересечением двух множеств M и N называется множество G, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые содержатся и в множестве M, и в множестве N.

Обозначение: $G = M \bigcap N$.

Пример: Рассмотрим следующие четыре множества: $A = \{5, 4, 7\}$, $K = \{7, 5\}$, $L = \{2, 3\}$, $D = \{7, 9\}$.

Пересечение множеств A и K есть само множество K, то есть: $A \bigcap K = K$.

Пересечение множеств A и L есть пустое множество: $A \bigcap L = \emptyset$.

Пересечение множеств A и D — множество $C = \{7\}$: $A \bigcap D = C$.

Объединением двух множеств M и N называется множество G, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые содержатся либо в множестве M, либо в множестве N, либо в обоих множествах M и N.

Обозначение: $G = M \bigcup N$.

Пример: а) Рассмотрим множества $K = \{7, 5\}$, $D = \{7, 9\}$, $T = \{7, 5, 9\}$.

Найдем объединение $K \bigcup D = \{7, 5\} \bigcup \{7, 9\} = \{7, 5, 9\}$. *Как видим,* $K \bigcup D = T$.

б) Найдем $C\ _1\ L$, *где* $C = A\ _2\ D$, $A = \{5, 4, 7\}$, $D = \{7, 9\}$, $L = \{2, 3\}$.

1) $C = \{5, 4, 7\}\ _3\ \{7, 9\} = \{7\}$;

2) $C\ _4\ L = \{7\}\ _5\ \{2, 3\} = \{7, 2, 3\}$. *Итак,* $C\ _6\ L = (A\ _7\ D)\ _5\ , L = \{7, 2, 3\}$.

Разностью двух множеств M и N называется множество G, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые содержатся в множестве M, но не содержатся в множестве N.

Обозначение: $G = M \backslash N$.

Пример: Даны множества: $L = \{2, 3\}$, $A = \{5, 4, 7\}$, $K = \{7, 5\}$, $D = \{7, 9\}$, $B = \{4\}$ *и* $C = \{5\}$.

а) Найдем $A \backslash K = \{5, 4, 7\} \backslash \{7, 5\} = \{4\} = B$. *Получаем* $A \backslash K = B$. *Аналогично получим:*

б) $A \backslash A = \emptyset$;

в) $K \backslash L = K$;

г) $K \backslash D = C$.

*Если требуется вычислить количество элементов в объединении двух множеств, то здесь необходимо применить одно из двух **правил суммы:***

а) **правило суммы для двух непересекающихся** (не имеющих общих элементов) **множеств**:

Если множество M содержит a элементов (обозначение: $n(M) = a$*), а множество N — b элементов и эти множества не пересекаются (т.е.* $M \bigcap N = \emptyset$*), то объединение множеств* $M \bigcup N$ *содержит* $a + b$ *элементов:*

$$n(M \bigcup N) = n(M) + n(N) = a + b \quad \textbf{(1.1)}$$

б) **правило суммы для двух пересекающихся множеств:**

Если множества M и N пересекаются, то число элементов их объединения равно сумме числа элементов в каждом из них, уменьшенной на число элементов в пересечении этих множеств:

$$n(M \bigcup N) = n(M) + n(N) - n(M \bigcap N) \ (M \bigcap N \neq \varnothing) \ \textbf{(1.2)}$$

Пример: а) Рассмотрим два непересекающихся множества: A={5,4,7} и L={2,3}. Здесь n(A)=3, n(L)=2. $A \bigcup L$ = {5,4,7,2,3}, по формуле (1.1) n($A \bigcup L$)=5;

б) Для двух пересекающихся множеств: A={5,4,7} и D={7,9}. Найдем $A \bigcap D$ = {5,4,7}$\bigcap${7,9} = {7}. Здесь n(A) = 3; n(D) = 2; n($A \bigcap D$) = 1. По определению суммы: $A \bigcup D$ = {5,4,7}$\bigcup${7,9} = {5,4,7,9}; n($A \bigcup D$) = 4. По формуле (1.2): n($A \bigcup D$) = n(A) + n(D) – n($A \bigcap D$) = 3 + 2 – 4 = 1.

Правило умножения:

Пусть даны два конечных множества A и B, множество A содержит μ элементов, множество B — ν элементов. Число различных пар, которые можно составить, взяв по одному из каждого множества, равно произведению μν.

Пример: A = {эклер, трубочка с кремом}, B = {сок яблочный, сок грушевый, сок апельсиновый}. Всевозможные пары «сок — пирожное» найдем с помощью таблицы, в которой, для краткости, пирожные обозначены э и т, а соки — я, г и а соответственно.

	я	г	а
э	яэ	гэ	аэ
т	ят	гт	ат

Здесь μ = n(A) = 2; ν = n(B) = 3.

Из таблицы видно, что число пар равно μν = 2·3 = 6.

При решении задач со множествами очень удобно использовать графические иллюстрации с помощью **диаграмм Эйлера — Венна.** Множество изображается как часть плоскости, ограниченная некоторым замкнутым контуром (рис. 1.1).

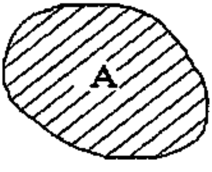


Рис. 1.1

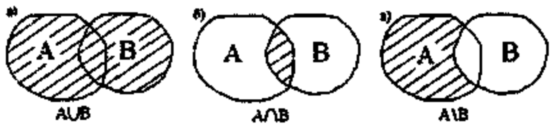


Рис. 1.2

На рис 1.2 *а, б* и *в* заштрихованные фигуры иллюстрируют, соответственно, объединение, пересечение и разность двух множеств.

Пример. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера — Венна множества A, B и C, если:

а) $A \subset B$ *и* $B \subset C$;

б) $A \subset C$, $B \subset C$, $C = A \bigcup B$;

в) $A \bigcap B \neq \varnothing$, $A \bigcap C \neq \varnothing$, $B \bigcap C \neq \varnothing$, $A \bigcap B \bigcap C \neq \varnothing$.

Решение: (рис. 1.3).

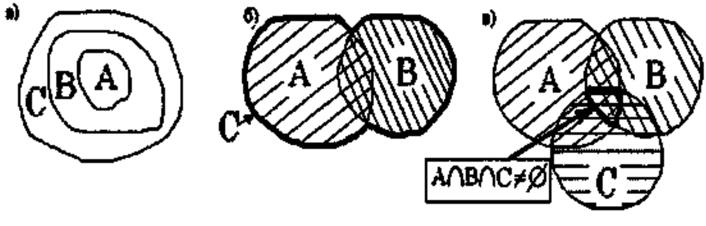


Рис. 1.3

Прокомментируем решение в). По условию A пересекается с B (общая часть плоскости), A пересекается с C (общая часть плоскости), B пересекается с C (общая часть плоскости), и все три контура имеют общую часть плоскости.

Замечание: *если заштриховать контуры каждого множества штриховкой разных наклонов, то пересечение штриховок отразит пересечение соответствующих множеств.*

Конечное множество называется **упорядоченным**, если существует заданный порядок его элементов. Для обозначения таких множеств будем использовать круглые скобки.

Два **конечных упорядоченных** множества считаются **равными**, если они состоят соответствено из одинаковых элементов, расположенных в одном и том же порядке.

Пример: а) P = (сержант, капитан, майор, полковник, генерал);

б) $A = (4, 5, 2)$, $B = (4, 5, 2)$, $C = (5, 4, 2)$. *Здесь:* $A = B$, *но* $A \neq C$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Перечислить все элементы множества A, являющегося подмножеством множества натуральных чисел и состоящего из чисел, кратных 3 и меньших 59.

2. Создайте множество K, элементами которого будут имена всех учеников вашего класса. Дано множество V = {Рома, Саша, Дима, Настя, Женя, Света, Юля, Ваня}. Найдите $K \bigcap V$, $K \bigcup V$ и $V \backslash K$.

3. Указать все подмножества множества $E = B \backslash A$, если:

а) A = {б, л, е, ф}, B = {к, л, у, б};

б) $A = \{4, 7, 1, 2\}$, $B = \{7, 3, 2\}$;

в) $A = \{/, \backslash, -, =, +\}$, $B = \{=, +\}$.

4. Пусть $A = \{x\}$, $F = \{y\}$. Найти количество элементов в множествах $E = A \backslash F$, $D = F \backslash A$, $C = A \bigcup F$, $K = A \bigcap F$, если:

а) $\begin{cases} x \in N, \\ x < 7, \end{cases}$ $\begin{cases} y \in N_0, \\ y \le 8. \end{cases}$ (иначе, x — все натуральные числа, меньшие 7, y — все числа расширенного натурального ряда (ряд натуральных чисел с приписанным нулем в начале ряда), не большие 8).

б) $\begin{cases} x \in Z, \\ |x| \le 3, \end{cases}$ y — пустое множество, $\{y\} = \varnothing$.

5. П — множество прямоугольников, Р — множество ромбов. Какие фигуры являются элементами множества $N = П \bigcap Р$?

6. Известно, что $M = \{a, c, f\}$, $K = \{k, l, b\}$, найти множество W, если: $M = W/K$.

7. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера — Венна множества A, B, C, если:

а) $A \subset C$, $B \subset C$ и $A \backslash B = \varnothing$;

б) $A \subset C$, $B \subset C$, $A \bigcap B = \varnothing$;

в) $A \bigcap B = \varnothing$, $A \bigcap C = \varnothing$, $B \bigcap C \ne \varnothing$.

8. Описать с помощью символики теории множеств отношения между множествами A, B и C для диаграмм Эйлера — Венна, представленных на рис. 1.5 *а*, *б* и *в*.

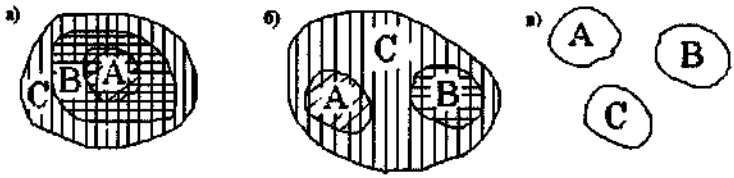


Рис. 1.5

9. Пять стрелков стреляют по трем мишеням. Сколько всего сделано выстрелов, если каждый выстрелил по каждой мишени один раз?

Т е м а 2. Комбинаторика

Основными понятиями этого раздела являются различные соединения (комбинации) элементов множеств, которые подразделяются на размещения, перестановки и сочетания. Соединения могут быть с повторениями и без повторений. Далее, если нет специальных оговорок, под размещениями, перестановками и сочетаниями подразумеваются эти соединения без повторений.

п. 1. Размещения

Размещениями из *n* элементов по *k* элементов называются всевозможные упорядоченные подмножества по k элементов из множества различных n элементов, отличающихся друг от друга порядком или самими элементами ($n > k$). Максимальное число таких подмножеств обозначается A_n^k. Читается «число размещений из n элементов по k» или просто «A из n по k».

Пример: Рассмотрим множество из четырех элементов a, b, c и d. Выпишем всевозможные размещения из этих четырех элементов по два найдем их число (Таблица 2.1).

Таблица 2.1

ab	*ac*	*ad*
ba	*bc*	*bd*
ca	*cb*	*cd*
da	*db*	*dc*

Очевидно, этой таблицей исчерпываются всевозможные размещения из четырех элементов по два элемента. Число строк — 4, столбцов — 3, значит, всего $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Теперь найдем A_4^3 *(Таблица 2.2)*

Таблица 2.2

abc	*acd*	*adb*	*bac*	*bcd*	*bda*	*cab*	*cbd*	*cda*	*dab*	*dbc*	*dca*
acb	*adc*	*abd*	*bca*	*bdc*	*bad*	*cba*	*cdb*	*cad*	*dba*	*dcb*	*dac*

Технология построения таблицы такая. Сначала выписываем все размещения из Таблицы 2.1 и приписываем к каждой паре элементов еще один (первая строка Таблицы 2.2). Во второй строке переставляем второй и третий элемент соединения первой строки.

Из таблицы 2.2: $A_4^3 = 12 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Аналогично можно получить, например, $A_7^2 = 7 \cdot 6$; $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Вообще,

$$A_n^k = n(n-1)...(n-(k-1) \qquad \textbf{(2.1)}$$

Правило: *Число размещений из n по k равно произведению k последовательных целых чисел, из которых наибольшее есть n.*

Введем обозначение $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ — произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n. (Читается «эн факториал»). Тогда:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2.2)$$

Отметим очевидное полезное свойство факторила:

$$n! = (n-1)!n \qquad (2.3)$$

Например: $5! = 4!\cdot 5$

Условимся также считать $0! = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и секретаря собрания из присутствующих 30 человек?

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 8 при условии, что три цифры в каждом числе различны?

3. Сколько трехзначных чисел, образованных различными цифрами (т.е. без повторений), можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

4. Во время загородной прогулки на привале Серьезный Петя нашел три камня весом 1 кг, 1,5 кг и 3 кг и решил незаметно подложить по одному камню в рюкзаки своим друзьям. Сколькими способами может «пошутить» Серьезный Петя, если друзей с рюкзаками шесть?

п. 2. Перестановки

Перестановками из k элементов называется размещения из k элементов по k, т.е. множество, состоящее из всех данных k элементов, отличающихся только порядком расположения этих элементов. Максимальное число таких множеств называется **числом перестановок из k элементов** и обозначается P_k. Из определения перестановок:

$$P_k = A_k^k = k(k-1)\ldots(k-(k-1)) = k(k-1)\ldots 1 = k!$$

Формула: $P_k = k!$ (2.4)

Правило: *число перестановок из k элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до k.*

Пример: перестановки из трех элементов a, b и c:
abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Как видим, $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В актовом зале за столом президиума 4 стула. Сколькими способами можно рассадить четырех человек, избранных в президиум?

2. Сколькими способами Толстый Вася может съесть четыре разные пиццы и шесть разных пирожных, если сначала нужно съесть все пиццы. (Под способом подразумевается порядок поедания.)

3. За круглым столом на именинах у Ани рассаживаются семеро гостей. 1) Сколькими способами можно рассадить гостей? 2) Сколькими способами можно рассадить гостей так, чтобы рядом с Аней сидел Ваня? (Имена всех гостей разные, места за столом равноценные.)

4. Сколькими способами в предыдущей задаче можно рассадить гостей так, чтобы 1) Ваня сидел напротив Ани; 2) чтобы Ваня сидел с рядом Аней, а напротив Ани сидела бы Таня?

п. 3. Сочетания

Сочетаниями из *n* элементов по *k* элементов ($n \geq k$) называются всевозможные неупорядоченные подмножества по *k* элементов, взятые из данных *n* элементов. Порядок элементов в каждом подмножестве значения не имеет, но подмножества должны отличаться хотя бы одним элементом. Максимальное число таких подмножеств обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка») и называется **числом сочетаний из *n* элементов по *k*.**

Например, выпишем всевозможные сочетания по три элемента из пяти элементов a, b, c, d и e:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Получили всего 10 сочетаний $C_5^3=10$. Связь между сочетаниями, размещениями и перестановками можно увидеть из таблицы 2.3, содержащей всевозможные размещения из пяти элементов *a, b, c, d* и *e* по три.

Таблица 2.3

$P_3=6$ строк	*abc*	*abd*	*abe*	*acd*	*ace*	*ade*	*bcd*	*bce*	*bde*	*cde*
	acb	*adb*	*aeb*	*adc*	*aec*	*aed*	*bdc*	*bec*	*bed*	*ced*
	bca	*bad*	*bae*	*cad*	*cae*	*dae*	*cbd*	*cbe*	*dbe*	*dce*
	bac	*bda*	*bea*	*cda*	*cea*	*dea*	*cdb*	*ceb*	*deb*	*dec*
	cab	*dab*	*eab*	*dac*	*eac*	*ead*	*dbc*	*ebc*	*ebd*	*ecd*
	cba	*dba*	*eba*	*dca*	*eca*	*eda*	*dcb*	*ecb*	*edb*	*edc*

$C_5^3=10$ столбцов

Технология построения таблицы размещений такова. Строим строку всевозможных сочетаний из семи элементов по три; ниже каждого соединения из трех элементов выписываем всевозможные перестановки из этих элементов. Полученная таблица содержит A_{10}^3 размещений, состоящих из P_3 строк и C_7^3 столбцов, и получаем $A_5^3 = C_5^3 \cdot P_3$, откуда $C_5^3 = A_5^3 / P_3$. Вообще, справедлива формула:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} \tag{2.5}$$

Используя формулы (2.2) и (2.4), получаем:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2.6}$$

Справедливы также формулы:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \tag{2.7}$$

Например: $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$; $C_5^{5-3} = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$

$$C_n^k + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{k+1} \tag{2.8}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. Доказать тождество $C_n^k + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{k+1}$.

3. Встретились и обменялись рукопожатиями десять старых друзей. Сколько всего было сделано рукопожатий?

4. На плоскости дано 12 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько различных треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

5. На плоскости дано 12 точек, из которых 4 лежат на одной прямой. Кроме того, из рассматриваемых точек никакие 3 не лежат на одной прямой. 1) Сколько различных прямых можно провести через эти точки? 2) Сколько можно построить различных треугольников с вершинами в этих точках?

Дополнительные упражнения к разделу «Соединения без повторений»

В математическом образовании школьника комбинаторика имеет самостоятельное значение, ее не следует рассматривать только в связи с теорией вероятностей. Многие читатели, наверное, помнят этот раздел как самостоятельный в программе средней школы (он назывался «Соединения и бином Ньютона»), когда стохастика изучалась только факультативно. В дополнительных упражнениях созданы задачи более сложного уровня. Обширный набор комбинаторных задач от простейших до олимпиадных хорошо представлен в книгах [4] и [5].

1. Остап Бендер приступил к раздаче десяти игрушечных слонов, причем все слоны разного размера. Даше досталось 2 слона, Саше — 3, а Глаше — 5. Сколькими способами может Остап осуществить раздачу?

2. Десять пассажиров хотят совершить поездку в поезде. В кассе есть 6 билетов на нижние полки и 4 — на верхние. При этом 2 пассажира желают ехать наверху, 3 пассажира — внизу. Сколькими способами можно разместить пассажиров, если 1) места не нумерованы (верхние полки равноценны, нижние полки равноценны); 2) места нумерованы (т.е. неравноценны).

3. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если каждое число должно состоять из двух четных и двух нечетных цифр, причем никакие цифры в нем не повторяются?

4. В лаборатории работает 8 физиков и 10 химиков. Надо создать рабочие группы по трем темам. В первую группу должны войти 4 физика, во вторую — 5 химиков, а третья должна состоять из трех человек, которые могут быть как физиками, так и химиками. Сколькими способами можно создать такие группы?

5. Сколько шестибуквенных «слов» можно образовать из слова КОРОНА так, чтобы две буквы О не стояли рядом?

6. В театре работают 5 молодых актеров и 6 молодых актрис. В новой пьесе три женских и две мужских роли для молодых исполнителей. Сколькими способами можно подобрать актеров на эти роли?

7. Сколькими способами можно разложить 19 различных предметов по 5 ящикам так, чтобы в 4 ящика легли по 4 предмета, а в оставшийся — 3 предмета? Ящики считать равноценными.

п. 1. Размещения с повторениями

Пример 1. Сколько «слов» по две буквы можно составить из трех букв: а, у, ы? Составим список всех таких «слов» перебором: аа, уу, ыы, ау, аы, уы, уа, ыа, ыу. Получилось 9 «слов». Обозначим их число $\tilde{A}_3^2$. $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$

Пример 2. Сколько «слов» по три буквы можно составить из двух букв а и е?

Снова перебором находим: ааа, аае, аеа, еаа, еea, еае, аее, еее. Получим $\tilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$

Размещениями из n различных элементов по k с повторениями назовем всевозможные соединения по k элементов, взятые из данных n элементов и отличающиеся либо самими элементами, либо их порядком. При этом любые элементы (в каждом размещении) могут повторяться до k раз. Как видно из примера 2, n может быть меньше, чем k ($n \geq 1, k \geq 1$).

Наибольше число таких размещений называется **числом размещений из n элементов по k с повторениями** и обозначается $\tilde{A}_n^k$. Формула:

$$\tilde{A}_n^k = n^k \qquad (2.9)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из чисел 1, 3, 5, 7 и 9?

2. Сколько двузначных чисел можно составить из всех цифр от 0 до 9?

п. 2. Перестановки с повторениями

Пример 1. Сколько различных «слов» можно составить из слова «ЛАОКООН», если каждое «слово» содержит семь букв, и разрешается в каждом слове использовать буквы Л, А, К и Н по одному разу, а букву О — три раза, например,ОАЛКООН, КЛООНАО и т.п.

Решение получим следующим рассуждением. Пронумеруем повторяющиеся буквы: $ЛАО_1КО_2О_3Н$. *Если бы* $О_1$, $О_2$ *и* $О_3$ *засчитывались как разные, то всего семибуквенных «слов» было бы* $P_7 = 7! = 5040$. *Но буквы индексов не имеют, поэтому слова, например,* $ЛАО_1КО_2О_3Н$ *и* $ЛАО_2КО_1О_3Н$ *являются одинаковыми. Каждому упорядоченному множеству букв с индексами соответствуют все перестановки из букв* $О_1$, $О_2$ *и* $О_3$, *а именно* $P_3 = 3!$ *одинаковых «слов»*

Если x — искомое число, то $P_7 = x \cdot P_3$. Откуда $x = \frac{P_7}{P_3} = \frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840$ «слов».

Пример 2. Сколько разных «слов» из четырех букв можно составить из слова «мама»?

Решение: Рассуждая подобным образом, как в примере 1, получим искомое число $x = \frac{P_4}{P_2 \cdot P_2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ «слов». (Выпишите эти «слова»).

Перестановкой с повторениями из n элементов называется упорядоченное множество, содержащее n заданных элементов, из которых некоторые повторяются k_1, k_2, ..., k_n раз (причем $k_1 + k_2 + ... + k_n \leq n$). Максимальное число таких перестановок обозначим $\widetilde{P}_n$ и назовем **числом перестановок с повторениями**.

Формула:

$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{k_1! \, k_2! \ldots k_n!} \qquad (2.10)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько шестизначных чисел можно записать таких, что в них цифра 2 используется один раз, цифра 5 — два раза и цифра 7 — три раза, например 715757.

2. Сколько различных «слов», состоящих из восьми букв, можно составить из слова «харакири»?

п. 3. Сочетания с повторениями

Пример 1. В школьной столовой на десерт дают яблоки и груши. В комплект входит три плода по выбору школьника. Сколько разных вариантов десерта возможно?

Решение получим непосредственным перебором: яяя, яяг, ягг, ггг. Получили четыре варианта. Это пример сочетаний из двух элементов с повторениями, когда число элементов, из которых составляются сочетания $m = 2$, а число элементов, образующих каждое сочетание $k = 3$, причем любой элемент из m можно повторять до k раз. Если обозначить искомое количество всевозможных сочетаний $\widetilde{C}_2^3$, то $\widetilde{C}_2^3 = 4$.

Ответ: 4 варианта.

Этот же результат можно получить по формуле:

$$\widetilde{C}_m^k = C_{m+k-1}^k, \qquad (2.11)$$

где $\widetilde{C}_m^k$ — число сочетаний из m элементов по k с повторениями.

В примере 1: $C_2^3 = C_{2+3-1}^3 = C_4^3 = C_4^{4-3} = 4$.

Пример 2. На «Поле чудес» победитель выиграл два приза. Всего имеется пять разных видов призов. Сколькими способами может победитель отобрать выигрыш, если каждого вида приза можно получить до двух штук.

Решение перебором: если призы а, б, в, г и д, то возможный отбор: аа, бб, вв, гг, дд, аб, ав, аг, ад, бв, бг, бд, вг, вд, гд — всего 15 способов. По формуле (2.11): $\widetilde{C}_5^2 = C_{5+2-1}^2 = C_6^2 = \frac{6\ 5}{1\ 2} = 15$.

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k элементов называются неупорядоченные множества (любой набор) по k элементов из данных n элементов, причем любой элемент может повторятся до k раз. Наибольшее количество таких наборов называется **числом сочетаний из n элементов по k с повторениями.**

Это число может быть получено по формуле (2.11).

УПРАЖНЕНИЯ

1. В школьном буфете продается три сорта пирожков: с картошкой, капустой и горохом. На большой перемене Толстый Вася съедает10 пирожков. Сколькими способами может выбрать пирожки Толстый Вася?

2. Сколько существует треугольников, длины сторон которых могут принимать одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?

Дополнительные упражнения к разделу «Соединения с повторениями»

1. Две команды А и Б играют серию матчей по баскетболу до тех пор, пока одна из них не одержит четырех побед (ничьих в баскетболе нет). Сколько различных серий матчей может быть?

2. Сколькими способами можно переставить цифры числа 123589, чтобы между двумя четными цифрами стояли две нечетные.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «змееед», чтобы три буквы «е» не шли подряд?

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «шарага», чтобы две буквы «а» не стояли рядом?

Т е м а 3. Классическое определение вероятности

Стохастическим называют испытание или опыт (мысленный или действительный), если заранее нельзя предугадать его результаты или исход. Результаты (исходы) стохастического опыта называются случайными событиями или просто событиями.

Примеры:1) В урне лежат 3 геометрически одинаковых шара, но разных по цвету — белый, синий и красный. Из урны не глядя вынимают один шар и смотрят, какого он цвета. Опыт — изъятие шара из корзины, событие — изъятие шара определенного цвета.

2) Выбрасывается игральный кубик (опыт); выпадает двойка (событие).

События обозначают заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д.

Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания, называется **достоверным** (обозначается символом Ω), а которое не может произойти в результате испытания, — **невозможным** (символ $\varnothing$).

Пример: В мешке лежат 3 картофелины. Опыт — изъятие овоща из мешка. Достоверное событие Ω — изъятие картофелины, невозможное событие $\varnothing$ — изъятие кабачка.

Несколько событий называются **равновозможными**, если в результате опыта ни одно из них не имеет большую возможность появления, чем другие.

Примеры:1) В урне лежат три бильярдных шара — белый, синий и красный. Однократные изъятия шаров любого цвета — равновозможные события.

2) В урне лежат четыре шара с номерами 1, 2, 3 и 4. При этом, шар № 1 — белый, шар № 2 — красный, а шары № 3 и № 4 — синие. Опыт — изъятие одного шара. Событие — извлечение шара с каким-либо номером — все события равновозможны. Событие — извлечение шара определенного цвета — события неравновозможны. Ясно, что появление синего шара имеет больше шансов.

Классическими примерами равновозможных событий являются: выпадение орла или цифры при однократном выбрасывании монеты; выпадение чисел от 1 до 6 при однократном выбрасывании игрального кубика; выпадение любого номера при разыгрывании лотереи (честном!) и т.п.

Пример неравновозможных событий: выпадение при двукратном выбрасывании монеты: 1) двух гербов, 2) двух цифр, 3) герба и цифры. Разумно предположить, что равновозможными исходами опыта являются следующие: герб — герб, герб — цифра, цифра — герб, цифра — цифра. Отсюда выпадение подряд двух гербов (или двух цифр) и выпадение одного герба (безразлично, в каком порядке) — события неравновозможные.

Результаты опыта (события) могут быть совместимыми и несовместимыми.

События называются **несовместимыми (несовместными)**, если наступление одного из них исключает наступление других, и

совместимыми (совместными), если наступление одного из них не исключает наступления других.

Примеры несовместимых событий: 1) В результате одного выбрасывания монеты выпадает герб (событие A) или цифра (событие B);

2) Пассажир оплатит проезд (событие A) или проедет «зайцем» (событие B);

3) Случайная карта из колоды — бубна (событие A) или пика (событие B).

Примеры совместимых событий: 1) Случайная карта из колоды — бубна (событие A) и случайная карта из колоды — восьмерка (событие B);

2) При первом бросании монеты выпал герб (событие A), при втором бросании монеты выпала цифра (событие B).

3) Событие A — в огороде растет бузина. Событие B: в Киеве проживает Дядька. Событие A и B являются совместимыми.

Множество всех событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно произойдет, а любые два из которых несовместимы, называется **полной группой событий**.

События, образующие полную группу, называют **элементарными**.

Примеры: Полную группу событий образуют: 1) при однократном бросании монеты — элементарные события: A — выпадение герба, B — выпадение цифры;

2) при однократном выбрасывании игрального кубика — выпадение любой из шести цифр;

3) при однократном выбрасывании игрального кубика: A — выпадение четной цифры, B – выпадение нечетной цифры.

Противоположным событию A называется событие, которое происходит только тогда, когда не происходит событие A.

Обозначение: $\overline{A}$.

Противоположные события образуют полную группу событий.

Пример: Выпадение орла при одном подбрасывании монеты — противоположное событие к выпадению цифры.

Классическое определение вероятности:

Вероятностью случайного события А называют отношение числа элементарных событий, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех элементарных событий, входящих в полную группу событий.

Обозначение: $P(A)$.

Число событий, благоприятствующих событию A, обозначим m, а число событий в полной группе событий — n, тогда по определению имеем: $P(A)=\dfrac{m}{n}$ **(3.1)**

При использовании данной формулы задача сводится к правильному нахождению общего числа n полной группы элементарных событий и числа m элементарных событий, благоприятствующих данному. Для конечных множеств событий при нахождении m и n широко используются формулы комбинаторики.

Примеры: 1) Какова вероятность выпадения четной цифры при однократном выбрасывании игрального кубика?

Решение: Обозначим событие «выпадение четной цифры» буквой A. Всего элементарных событий 6 ($n = 6$); элементарных событий, благоприятствующих событию A: 3 ($m = 3$). По формуле (3.1): $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

2) Какова вероятность события A — выпадение двух цифр при двукратном подбрасывании монеты?

Решение: Всего равновероятных несовместимых элементарных событий, образующих полную группу, — четыре, а именно: герб — герб, герб — цифра, цифра — герб, цифра — цифра ($n = 4$). Благоприятствует событию A одно элементарное событие цифра — цифра, то есть $m = 1$. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25.

3) В урне лежат 10 пронумерованных бильярдных шаров. Одновременно извлекают 2 шара. Какова вероятность, что извлечены шары № 2 и № 5?

Решение: Полная группа элементарных событий — всевозможные сочетания из 10 шаров по 2: $n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 9\cdot 5 = 45$. *Благоприятствующее событие одно: $m = 1$. Искомая вероятность* $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{45}$.

Ответ: $\frac{1}{45}$.

Очевидно, что $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$, а для любого случайного события A имеем $0 < P(A) < 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. На ипподроме в забеге участвуют 3 лошади: белая с черными пятнами, черная с рыжими пятнами и рыжая с серыми пятнами. Найти вероятность того, что забег выиграет пятнистая лошадь.

2. Серьезный Петя решил купить конфету. В ассортименте имеется 7 карамелек, 5 леденцов и 4 шоколадные «Ласточки». Какова вероятность, что Петя полакомится ириской?

3. В корзине у пасхального зайца было 25 яиц: 7 зеленых, 10 красных, 5 желтых, остальные — синие. По пути одно из яиц потерялось. Какова вероятность того, что пропавшим было синее яйцо?

4. В мешке лежат карточки с буквами, из которых должны составить плакат: «Спартак — чемпион, но Зенит — круче!». Знаки препинания пишутся вручную. Вредная Рита наугад изымает из мешка и прячет одну букву. Найти вероятность того, что она спрятала букву 1) е; 2) а; 3) л; 4) ч.

5. Из колоды, содержащей 36 карт, вынимают наугад по одной карте. Какова вероятность следующих событий: A — первым извлечен туз; B — первой извлечена черная карта; C — извлечение второй карты — дама, если первым извлечен и отложен туз; D — извлечение третьей карты — черная масть, если первым извлекли и отложили червового валета, а второй — десятку пик?

6. Найти вероятность того, что наугад взятая костяшка домино содержит менее 6 точек.

7. В дельфинарии проводится викторина, и 100 посетителям дали шары, пронумерованные от 1 до 100, которые затем были ими брошены в бассейн к дельфинам. Какова вероятность того, что дельфин выбросит из воды шар, номер которого делится на 7?

8. У 6 щенков далматинцев на хвостах имеется соответственно от 1 до 6 пятен. Какова вероятность того, что у наугад взятого щенка число пятен на хвосте будет не менее 3?

9. Вредная Рита играет с Серьезным Петей в «Угадай двузначное число». Какова вероятность того, что:

а) Рита загадала нечетное число?

б) Рита загадала число, кратное 11?

в) Рита загадала число, не превосходящее 25?

10. В пруду плавают 30 щук. Ученые отловили 12 из них, поставили метки, затем вернули их в озеро. Вычислите вероятность того, что выловленные из пруда 2 щуки оказались с метками.

11. На полке стоит словарь, однотомная энциклопедия, справочник и учебник. С полки наугад взяли 3 книги. Какова вероятность того, что книги были взяты в следующем порядке: словарь, энциклопедия, учебник?

12. Прямоугольный параллелепипед размером $20\times30\times40$ см выкрасили следующим образом: грани 30×40 — черным цветом, грани 20×30 — белым, а грани 20×40 — серым. Затем его разрезали на кубики со стороной 5 см. Найти вероятность того, что взятый наугад кубик содержит окрашенными две грани, причем в черный и белый цвета.

Тема 4. Геометрическая вероятность

Пример 1. Даны два концентрических круга радиусов R и R/2 (рис. 4.1). Наудачу выбирается точка из большого круга. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри малого круга, если попадание в любые точки внутри или на границе большого круга равновозможно.

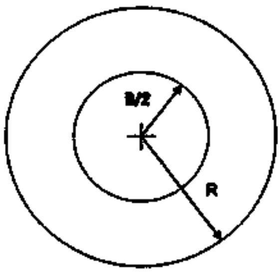


Рис. 4.1

Решение: Искомая вероятность равна отношению площади малого круга к площади большого:

$$P=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

В некоторых задачах слово «наудачу» нуждается в уточнении. Поясним это на примере 2.

Пример 2. В окружности радиуса R наудачу (случайно) выбирается хорда. Какова вероятность, что ее длина окажется не более радиуса R?

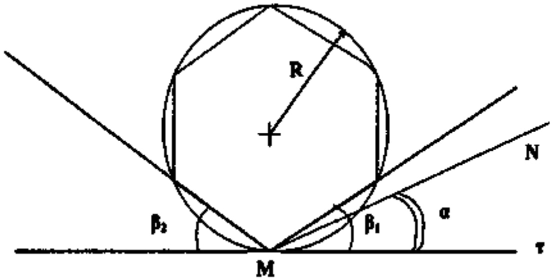


Рис. 4.2

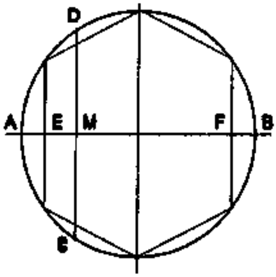


Рис. 4.3

Решение 1: Пусть слово «наудачу» обозначает следующее.

В произвольной точке M окружности проводятся касательная τ и секущая MN под случайным углом α, где $\alpha \in [0;\pi]$ (рис. 4.2). Считаем все значения угла $\alpha \in [0;\pi]$ равновозможными. Из рисунка видно, что если $\alpha \in [0;\pi/6]$ или $\alpha \in (\frac{5\pi}{6};\pi]$, то хорда окажется меньше или равна радиусу; если же $\alpha \in (\pi/6;5\pi/6)$, то хорда MN окажется больше радиуса. В этом случае искомая вероятность $P = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где $\mu_1 = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ — сумма углов, соответствующая благоприятному исходу опыта. $\mu_2 = \pi$ — угол, соответствующий всему множеству возможных исходов. Искомая вероятность $P = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}$.

Решение 2. Пусть слово «наудачу» обозначает такой выбор хорды: на диаметре AB (рис. 4.3) выбирается произвольная точка M и через нее проводится хорда $CD \perp AB$. Выбор любой точки M на AB — равновозможен. Построим правильный вписанный шестиугольник, как показано на рисунке 4.3.

Тогда искомая вероятность $P = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где $\mu_1 = AE + FB$, $\mu_2 = AB = 2R$.

$\mu_1 = AB - EF = 2R - 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = R(2 - \sqrt{3})$. *Искомая вероятность*

$$P = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}134 .$$

Как видим, результат существенно зависит от того, как организовать (мысленно или фактически) процесс отбора случайной величины «наудачу».

Из примеров 1 и 2 следует, что геометрическая вероятность P события есть отношение двух чисел μ_1 и μ_2, одно из которых μ_1 называют мерой множества благоприятных исходов, второе (μ_2) — мерой всех возможных исходов (причем и тех, и других исходов может быть бесконечное множество).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти вероятность того, что точка, брошенная в квадрат, окажется внутри вписанного в него круга, если все положения точек в квадрате равновозможны.

2. Паркетный пол составлен из прямоугольных плиток размером 6×24 см². Определите вероятность того, что упавшая на пол монета полностью ляжет на одну плитку, если диаметр монеты 2 см.

3. Стержень длины a наудачу разломали на 3 части. Найдите вероятность того, что длина каждой части окажется больше $\frac{a}{4}$.

4. Задача о толстой монете. Какой толщины должна быть монета (однородный цилиндр) диаметра a, чтобы вероятность падения ее на ребро равнялась 1/3. Удар монеты о горизонтальную плоскость считать неупругим.

Указание: рассмотреть два случая: 1) когда движение брошенной монеты случайное — монета выбрасывается «винтом»; 2) когда движение брошенной монеты плоскопараллельное (одно из осевых сечений монеты движется в своей вертикальной плоскости (такие выбрасывания получаются с использованием большого пальца руки)).

Тема 5. Независимые события. Условная вероятность. Теоремы умножения

Два события называются **независимыми**, если вероятность любого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

***Пример:** В пачке носовых платков лежат 2 синих платка и 3 красных. Рассмотрим следующие события:*

— *A — извлечение наугад красного платка; (вероятность $P(A)=\frac{3}{5}=0{,}6$ согласно классическому определению);*

— *B — появление синего платка при повторном извлечении, если первый изъятый красный платок перед этим вернули обратно в пачку ($P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$);*

— *C — появление синего платка при повторном извлечении, если первый изъятый красный платок не вернули в пачку (вероятность $P(C) = \frac{2}{4} = 0,5$).*

Здесь события A и B являются независимыми, поскольку исход опыта (событие) B никак не зависит от исхода опыта A, и вероятность P(B) не зависит от вероятности P(A). События A и C — зависимые, поскольку вероятность события C равна 0,5 с учетом наступления события A, и она была бы равна 0,4, если бы событие A не наступило.

Несколько событий называются попарно-независимыми, если каждые два из них независимые.

Вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что событие *A* уже произошло, называется **условной вероятностью события *B* по отношению к событию *A*.**

Обозначение: $P_A(B)$.

Пример: В урне лежат три красных бильярдных шара и два синих. Обозначим: A — событие, состоящее в извлечении красного шара, B — событие, состоящее в извлечении синего шара.

Если шар извлекается из урны только один раз, то имеем $P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$ $P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$.

Если два шара извлекаются последовательно без возврата в урну, то между вероятностями наступления событий A и B возникает зависимость. Например, если первым извлекли красный шар (событие A), то вероятность наступления события B в этом случае зависит от наступившего события A: $P_A(B) = \frac{2}{4} = 0,5$ *(сравните с P(B)).*

Если же первым будет извлечен синий шар (событие B), то при повторном испытании вероятность извлечения красного шара (событие A) теперь зависит от произошедшего события B: $P_B(A) = \frac{3}{4} = 0,75$ *(согласно классическому определению вероятности (сравните с P(A)).*

Произведением двух событий *A* и *B* называют событие *C*, состоящее в том, что в результате испытания происходят оба рассматриваемых события. Другими словами, событие *C* состоит в том, что произошло событие *A* и событие *B*.

Обозначение: $C = AB$.

Пример: В урне находится пять бильярдных шаров — три красных и два синих. Пусть A — событие, заключающееся в извлечении первым красного шара, событие B — в извлечении вторым — синего шара, событие C — в том, что первым извлекается красный, а вторым — синий шар. То есть событие C предполагает совместное наступление событий A и B. По определению произведения событий здесь C=AB.

Произведением нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что в результате испытания произойдут все рассматриваемые события.

Пример: В летнем лагере отдыхают дети в возрасте от 9 до 15 лет из разных стран. Рассмотрим событие G — появление на спортплощадке девочки; событие L — появление на спортплощадке ребенка 12 лет; событие R — появление на спортплощадке ребенка из Австралии. Тогда произведением этих событий будет событие S — появление на спортплощадке 12-летней австралийской девочки: S = GLR. (Но отсюда еще не следует, что P(S) = P(G)·P(L)·P(R)).

На вопрос о зависимости вероятностей совместно наступающих событий отвечают следующие две теоремы.

Теорема умножения для зависимых событий

Если события A и B являются зависимыми, то вероятность их произведения (событие $C = AB$) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(C) = P(A) \cdot P_A(B) \qquad (5.1)$$

Пример: В магазине продаются 5 плееров: два черных, серебристый, красный и желтый. В магазин зашли 2 покупателя, каждый с целью приобрести себе плеер. Какова вероятность того, что будут проданы два черных плеера?

Решение: пусть событие A — приобретение первым покупателем черного плеера, событие B — приобретение вторым покупателем черного плеера, событие C — куплены два черных плеера. По определению произведения событий имеем C = AB. События A и B — зависимые, поскольку вероятность наступления события A влияет на вероятность наступления события B. В самом деле, если первый покупатель купит черный плеер ($P(A) = \frac{2}{5}$), то вероятность покупки черного плеера вторым станет равной $\frac{1}{4}$ (по классическому определению). Если же первый не купит черный плеер, то вероятность покупки черного плеера вторым станет равной $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Зависимость есть, значит нужно использовать формулу (5.1). Согласно формуле (5.1) имеем: $P(C) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

Теорема умножения для независимых событий

Если события A и B — независимые, то вероятность события $C=AB$ равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) \tag{5.2}$$

Пример: Монета подбрасывается два раза. Какова вероятность выпадения орла в первом броске и цифры во втором?

Решение: Рассмотрим событие A — выпадение орла, событие B — выпадение цифры и C — выпадение орла при первом броске, а цифры при втором броске.

Согласно определению произведения событий имеем C = AB. События A и B — независимы, поскольку вероятность наступления любого из них не влияет на вероятность наступления другого. Согласно формуле (5.2) получаем:

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Обе теоремы справедливы для более, чем двух событий.

Например, если событие B зависит от наступления события A, а событие C зависит от наступления события B, то событие D, заключающееся в совместном наступлении событий A, B и C, имеет вероятность:

$$P(D) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

Если же события A, B, и C независимы, то: $P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В мешке Деда Мороза находится 30 конфет «Аленка» и 50 конфет «Белочка». Дед Мороз наугад вытаскивает и раздает по одной конфете детям. Какова вероятность: 1) что первые два ребенка получат по «Аленке»? 2) что первые три ребенка получат конфеты в последовательности: «Аленка» — «Белочка» — «Белочка»?

2. В курятнике живут 5 кур: три белые и две серые. На прогулку из курятника друг за другом вышли 3 курочки. Какова вероятность того, что они проследовали в таком порядке: 1) серая — белая, 2) серая — серая — белая. Изменится ли искомая вероятность при перестановке выхода кур? Например, для случая белая — серая — серая?

3. В лавке торговца бижутерией имеется 3 сундучка, в каждом из которых по 10 изделий. В первом — 8 браслетов с сапфирами, во втором — 7 кулонов сапфирами, в третьем — 5 колье с сапфирами. Из каждого сундучка наугад торговец вынимает по одному украшению для оформления витрины. Найти вероятность того, что в витрине будет представлена сапфирная подборка.

4. Среди 100 курсантов мореходного училища 75 имеют рост меньше 1 м 80 см и 25 — рост, больший или равный 1 м 80 см. Найти вероятность того, что среди трех случайно встреченных курсантов двое окажутся ниже, а один выше 1 м 80 см.

5. Вероятность того, что Толстый Ваня и Серьезный Петя оба моют руки перед обедом равна 0,32. Известно, что Ваня моет руки перед обедом с вероятностью 0,8. С какой вероятностью Петя моет руки перед обедом?

Т е м а 6. Совместимые события
Теоремы сложения

Суммой двух событий A **и** B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B.

Пример: появление двойки или четверки при выбрасывании игрального кубика $C = A + B$ — символическая запись события, состоящего в том, что выпадает либо двойка (событие A), либо четверки (событие B).

Пример: A — событие, заключающееся в извлечении короля бубен из колоды. B — извлечение любого туза. $C = A + B$ — событие, состоящее в извлечении либо короля бубен, либо любого туза.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример: В шляпе свернуты в трубочку лотерейные номера от 1 до 36. Выигрышными являются номера 2, 7, 29, 30, 32, 34. Пусть A_1 — извлечение № 2, A_2 — № 7; A_3 — № 29; A_4 — № 30; A_5 — № 32, A_6 — № 34. Событие $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ состоит в извлечении из шляпы любого выигрышного номера.

Напомним, что два события называются **несовместимыми (несовместными)**, если появление одного в данном испытании (опыте) исключает появление другого, и **совместимыми (совместными)**, если появление одного не исключает появления (или не появления) другого (*см.* также тему 3).

Графическая иллюстрация

Событие A — попадание в любую точку зоны A, событие B — попадание в любую точку зоны B.

Рис. 6.1 — события A и B несовместимы.

Событию $C = A + B$ соответствуют все точки как зоны A, так и зоны B.

Рис. 6.2 — события A и B совместимы.

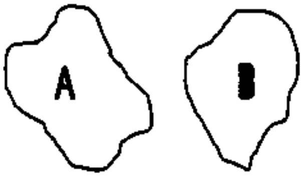


Рис. 6.1

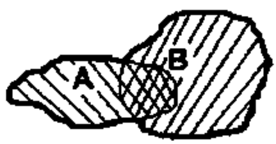


Рис. 6.2

Теорема сложения вероятностей для несовместимых событий

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ **(6.1)**

В частности, для противоположных событий имеем:

$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ **и** $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Теорема сложения вероятностей для совместимых событий

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий уменьшенной на вероятность их произведения.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B)$ **(6.2)**

Следует заметить, что при применении теоремы умножения для совместимых событий берутся в расчет теоремы умножения из темы 5.

Примеры на использование теоремы о сложении вероятностей для несовместимых событий:

1) В урне 5 красных шаров, 6 черных и 7 желтых. Какова вероятность, что взятый наугад шар — черный или желтый?

Решение: Пусть событие А — извлечение черного шара, тогда $P(A)=\frac{5}{18}$ ***; пусть В — извлечение желтого шара, тогда*** $P(B)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

События А и В — не совместимы (не может один и тот же шар быть и черным и желтым). Пусть С — событие «извлечен черный или желтый шар», тогда С = А + В, и по теореме о сложении вероятностей

$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\frac{13}{18}$.

Ответ: $\frac{13}{18}$.

2-й способ: Событием, противоположным событию С, является событие $\overline{C}$ — извлечение красного шара; $P(\overline{C})=\frac{5}{18}$; искомая вероятность $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

Примечание: Задачу можно также решить третьим способом, вытекающим непосредственно из классического определения ТВ:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{6+7}{18}=\frac{13}{18}.$$

Здесь m — суммарное количество черных и желтых, n — общее число шаров в урне.

2) Слово «победа» разрезали на шесть букв, свернули каждую букву в трубочку и сложили в урну. Наугад выбирают четыре буквы. Выигрывает игрок, у которого из взятых букв можно сложить слово «обед» либо слово «беда». Какова вероятность выигрыша?

Решение: Рассмотрим событие, состоящее в извлечении четырех букв. Полная группа таких событий содержит $C_6^4=C_6^2=15$ событий. Вероятность извлечения любых четырех букв $P(A_i)=\frac{1}{15}$ (A_i — i-й набор из четырех букв). Пусть A_1 — извлечение букв о, б, е, д, A_2 — извлечение букв б, е, д, а. Оба события несовместимы (не могут появиться сразу при одном опыте). По теореме о сложении вероятностей, искомая вероятность:

$$P = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{15}+\frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

Ответ: $\frac{2}{15}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Наугад выбираются две карточки из четырех с записанными на них цифрами 1, 2, 3, 4. Какова вероятность извлечь две карточки, сумма чисел на которых четна?

Задачу решить двумя способами: по теореме о сложении и на основе классического определения вероятности.

2. В урне лежат шесть карточек с буквами п, о, б, е, д, а. Последовательно наугад вынимают четыре карточки. Выигрывает тот, у которого получится из вынутых в случайной последовательности букв либо слово «обед», либо слово «беда»?

Задачу решить двумя способами.

3. Сидя под яблоней, Ньютон составил таблицу вероятности падения спелого яблока в зависимости от даты:

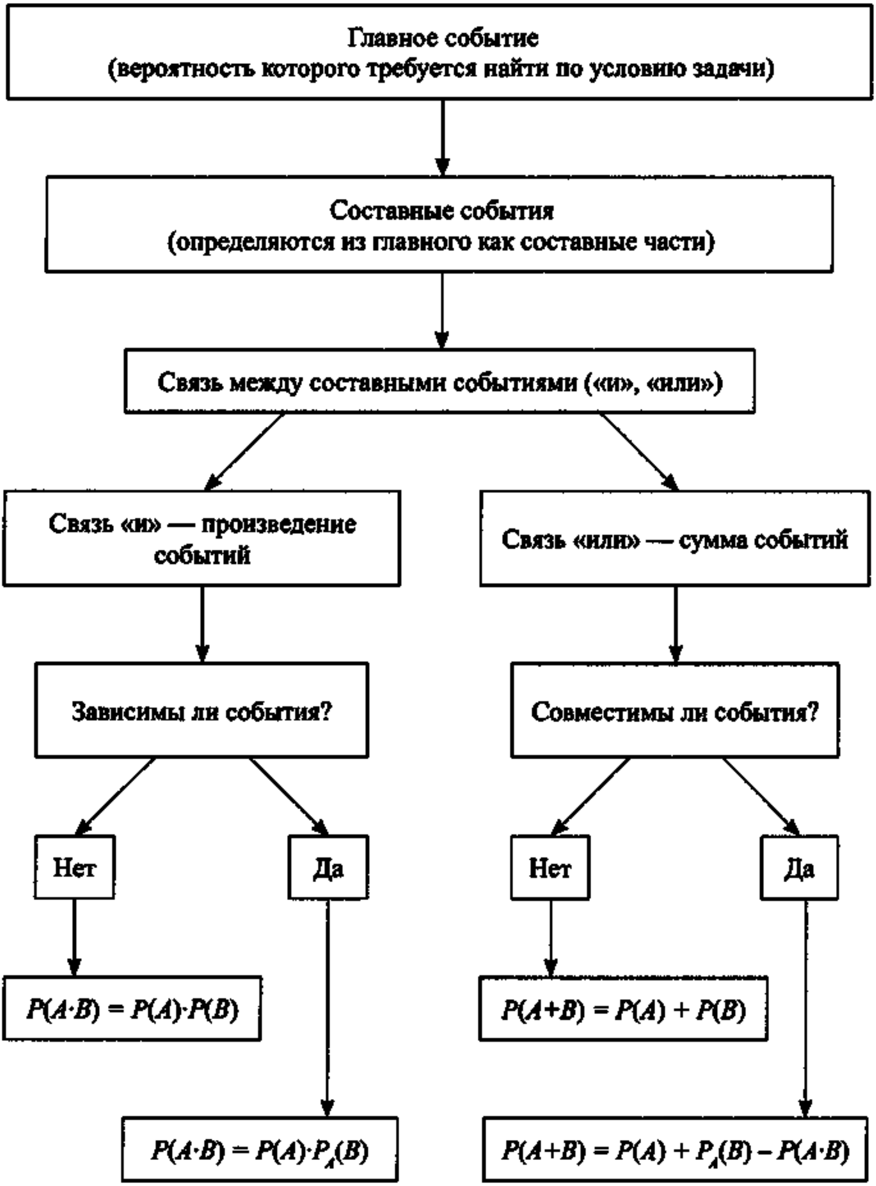
Время падения	До 20 августа	От 21 до 25 августа	От 26 до 31 августа	От 1 до 5 сентября	После 5 сентября
Вероятность	0,15	0,20	0,30	0,20	0,15

Какова вероятность падения яблока 1) до 5 сентября?
2) от 21 августа до 5 сентября?
3) после 25 августа?

4. В пруду находится n лососевых рыб, из которых m — с икрой ($m < n$). Рыбаку выдана лицензия на вылов k рыб ($k < n$). Какова вероятность, что из k пойманных рыб хотя бы одна будет с икрой? Найти искомую вероятность для частного случая: $n = 1000$, $m = 500$, $k = 4$.

Тема 7. Упражнения на применение теорем сложения и умножения вероятностей

Приведем схему, облегчающую использование теорем при решении задач:



УПРАЖНЕНИЯ

1. Два друга решили пойти на рыбалку на четыре дня. Если есть клев, то их совместный улов за день всегда составляет ровно 15 рыб. Клев есть лишь тогда, когда идет дождь. Вероятность того, что дождь пойдет в любой из дней, равна 0,25. Вычислите вероятность того, что итоговый улов будет состоять из 15 рыб.

2. В мотокроссе участвуют три гонщика от клуба «Заря», вероятность стать призером заезда у каждого соответственно равна 0,46, 0,5 и 0,8. Оцените вероятность того, что заезд будет иметь двух призеров от клуба «Заря».

3. Для передачи срочного сообщения для надежности были отправлены два почтовых голубя (на случай, если с одним из них произойдет что-нибудь непредвиденное). Вероятности доставки послания голубями соответственно равны 0,6 и 0,8. Какова вероятность доставки послания адресату?

Тема 8. Формула полной вероятности

Пример: В трех аквариумах плавают соответственно 30, 28 и 27 рыбок. Количество золотых рыбок в аквариумах соответственно равно 8, 6 и 9. Возле аквариумов бегает Серьезный Петя с сачком. Найти вероятность того, что наугад выбранная Серьезным Петей в сачок рыбка окажется золотой.

Решение: Неизвестно, какой аквариум станет «жертвой». Поэтому здесь возможна реализация одного из трех событий (гипотез): B_1 *— кража из аквариума № 1,* B_2 *— то же из аквариума № 2,* B_3 *— то же из аквариума № 3. Все эти гипотезы, очевидно, равноценны, исключают друг друга (несовместны) и образуют полную группу.*

Таким образом, $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

Допустим, «победила» первая гипотеза, и Петя избрал аквариум № 1. Тогда вероятность извлечения золотой рыбки — это условная вероятность:

$P_1(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$.

Здесь A — событие — извлечение золотой рыбки.

Итак, вероятность извлечения золотой рыбки из первого аквариума составит $P_1(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{30}$.

Рассуждая подобным образом, получим, что вероятность извлечения золотой рыбки из 2-го аквариума составит $P_2(A)=P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{28}$

и то же — из 3-го аквариума: $P_3(A)=P(B_3)\ P_{B_3}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{27}$.

Чтобы в сачок попала золотая рыбка, подходит реализация гипотезы № 1 или № 2, или № 3 (любой из них), причем гипотезы несовместимы. Значит, можно воспользоваться теоремой о сложении в виде:

$$P(A)=P_1(A)+P_2(A)+P_3(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{30}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{28}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{27}=\frac{19}{70}.$$

Обобщая полученный результат, получим формулу полной вероятности: $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$, или, короче:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) \qquad (8.1)$$

Где $P(A)$ — искомая вероятность события A, $P(B_k)$ — вероятность k-ой гипотезы, $P_{B_k}(A)$ — условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что реализована гипотеза B_k. Гипотезы B_k, $k=1, \ldots, n$ — несовместны и образуют полную группу.

Соответствующую теорему можно сформулировать так: *вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из событий (гипотез) $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Имеются 2 коробки с шурупами и гвоздями по 100 изделий в каждой: в первой — 10 гвоздей, во второй — 20 гвоздей. Какова вероятность того, что из наудачу взятой коробки будет наугад извлечен шуруп?

2. Имеются четыре урны. В первой урне 1 красный и 1 синий шар, во второй — 2 красных и 3 синих шара, в третьей — 3 красных и 5 синих, и в четвертой — 4 красных и 7 синих шаров. Наугад выбирают одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар красный.

3. На контрольной работе по математике Маша воспользовалась шпаргалкой, которую ей подбросила Даша. Это могли заметить Близорукая Саша (с вероятностью 0,3) и Зоркая Клаша (с вероятностью 0,8). Саша ябедничает учительнице с вероятностью 0,9, а Клаша — с вероятностью 0,5. Какова вероятность, что учительница узнает о шпаргалке?

Ответ: $p = 0{,}562$.

4. Имеется три урны с бильярдными шарами. В первой урне 1 белый и 1 черный шар. Во второй — 2 белых и 3 черных, в третьей урне — 2 белых и 4 черных. Вероятность выбора i-той урны дана формулой $p_i = \frac{i}{6}$. Какова вероятность, что взятый наугад шар из случайно выбранной урны — белый?

Тема 9. Формула Байеса*

Переходя к формуле Байеса, вернемся к примеру с аквариумами.

Напомним, что там Серьезный Петя наугад выбирает один из трех аквариумов, а в выбранном аквариуме — наугад — рыбку. Если в первом аквариуме 30 рыбок и из них 8 — золотых, во втором — 28 и 6, в третьем — 27 и 9 соответственно, то вероятность поймать золотую рыбку мы нашли по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{19}{70}.$$

Здесь обозначено: A — событие «поймана золотая рыбка», $P_{B_i}(A)$ — вероятность поймать золотую рыбку, если состоится событие B_i — Серьезный Петя выбрал i-й аквариум, с вероятностью $P(B_i)$.

Теперь поставим другую задачу: при тех же условиях найти, например, вероятность $P_A(B_1)$. Как она расшифровывается (*см.* обозначения условных вероятностей на с. 17): это вероятность выбора первого аквариума, если уже известно, что поймана именно золотая рыбка (а из какого аквариума, мы не знаем). В этом случае искомая вероятность находится по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Или с числами задачи: $P_A(B_1)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{30}}{\frac{19}{70}}=\dfrac{56}{171}$. Аналогично получим вероятности выбора 2-го или 3-го аквариумов по формулам: $P_A(B_2)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{28}}{\frac{19}{70}}=\dfrac{45}{171}$;

$P_A(B_3)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{27}}{\frac{19}{70}}=\dfrac{70}{171}$.

Понятно, что теперь сумма $P_A(B_1)+P_A(B_2)+P_A(B_3)=1$, поскольку факт поимки золотой рыбки (событие А) теперь является достоверным.

Вообще, формула Байеса может быть «оформлена» в виде теоремы: *Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместимых событий (гипотез) $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу. Тогда, если событие А свершилось (P(A)=1), то вероятность i-той гипотезы B_i определяется по формуле Байеса:*

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},\ i=1,2,\ldots,n \qquad (9.1)$$

Здесь $P(A)$ — полная вероятность события A, рассчитанная по формуле (8.1).

УПРАЖНЕНИЯ

1. В первом загоне находятся 10 овец, из которых 2 — белые, остальные — черные, а во втором загоне — 7 белых и 3 черных овцы. Между загонами есть переход, и одна из овец первого загона перешла во второй. Переход закрыли и из второго загона отобрали одну овцу для стрижки. Какова вероятность того, что пойманная овца оказалась из первого загона, если известно, что она белая?

2. В трех коробках лежат конфеты «Белочка», произведенные на двух фабриках «Рассвет» и «Заря». В первой коробке 30% конфет фабрики «Заря», во второй — 40%, а в третьей — 50%. Наугад выбрали коробку и из нее наугад вынули конфету. Какова вероятность, что извлеченная конфета была а) из первой коробки, б) из второй коробки, в) из третьей коробки, если известно, что она оказалась произведенной на фабрике «Заря»?

3. В десяти ящиках упаковано по 100 одинаковых по форме латунных и бронзовых шариков, причем доля латунных шариков образует арифметическую прогрессию с начальным количеством m_0=10 латунных шариков в первом ящике и разностью также d=10 шариков, так что в ящике № 2 — 20 латунных шариков, в ящике № 3 — 30 и т.д. Наудачу выбранный шарик оказался латунным. Какова вероятность, что он был извлечен а) из ящика № 2? б) из ящика № 8? Все ящики по виду неотличимы.

Тема 10. Формула Бернулли

Пример: На тренировке баскетболист бросает мяч в корзину из одной и той же позиции. Событие A — попал, событие B — промахнулся, причем $B = \overline{A}$, т.е. события A и B противоположны. Известно, что вероятность попасть в корзину у баскетболиста равна p=0,6, не попасть $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$. Какова вероятность, что из 10 бросков баскетболист попадет в корзину а) 6 раз? б) 10 раз? в) 3 раза?

Решение: Результаты каждого броска не зависят от результатов предыдущих и последующих бросков. Например, если случай а) реализован так: AABABBABAA (или $AA\bar{A}A\bar{A}\bar{A}A\bar{A}AA$), то, по теореме умножения вероятностей, вероятность реализации такой перестановки будет $ppqpqqpqpp = p^6q^4$. Всего перестановок с шестью попаданиями и четырьмя промахами существует (см. формулу 2.10): $P_{10} = \dfrac{10!}{6!\,4!}$*; отметим, что также:* $C_{10}^{6} = \dfrac{10!}{6!\,4!}$*. По теореме о сложении вероятностей, искомая вероятность составит* $P = C_{10}^{6}\ p^6 \cdot q^4 = \dfrac{10\ 9\ 8 \cdot 7}{1 \cdot 2\ 3\ 4}\left(\dfrac{3}{5}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^4 = 0{,}2508$.

В случае б) реализация возможна единственным способом: AAAAAAAAAA. По теореме умножения вероятностей. $P = 0{,}6^{10} = 0{,}00605$ *(маловато шансов, тренируйся дальше!). Этот результат можно переписать так:* $P = C_{10}^{10} \cdot p^{10}\ q^0 = 1 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 1$.

Для случая в) аналогично получим:

$$P = C_{10}^{3} \cdot p^3 \cdot q^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^7 = 0{,}1274.$$

Вообще, если в однократном опыте вероятность наступления события А равна p, а противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$, то вероятность появления события А ровно m раз при n повторных испытаниях составляет:

$$P = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{(n-m)}. \qquad (10.1)$$

Данная формула носит название **формула Бернулли**.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что вероятнее выиграть: одну партию из двух или две из четырех, если играют равносильные соперники и ничьи невозможны?

2. Из взятых напрокат вещей 85% возвращаются исправными. Какова вероятность того, что из 6 вещей неисправными вернут не более 1? (Ответ округлите до тысячных.)

Т е м а 11. Закон больших чисел*

Самая простая иллюстрация закона больших чисел связана с подбрасыванием монеты. Из соображений симметрии вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$. Закон больших чисел проявляется здесь так: чем больше выбрасываний будет произведено, тем ближе окажется доля выпавших гербов к $\frac{1}{2}$. Более точно: чем больше число испытаний, тем больше вероятность тесной близости доли выпавших гербов к половине.

В общем виде: если n — число подбрасываний монеты, m — число выпавших гербов, $W_n = \frac{m}{n}$ — относительная частота появления гербов, то при $n \to \infty$, $W_n \to \frac{1}{2}$.

Практически это надо понимать так: при увеличении числа опытов n доля выпадения гербов (как и цифр) чаще всего становится ближе к 50% (хотя возможны и отдельные исключения: вероятность $p \neq 1$ все-таки не гарантия!).

И все же этот пример (многократное подбрасывание монеты) был неоднократно подтвержден экспериментально, и в классе его можно произвести (при желании).

Теоретическим обоснованием приведенного примера является **теорема:**

Пусть вероятность события A в некотором эксперименте равна p, и пусть проводится n независимых повторений этого эксперимента. Через m обозначим количество появлений события A. Тогда для любого числа a > 0 имеет место неравенство Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>a\right)<\frac{pq}{a^2n} \qquad \textbf{(11.1)}$$

Здесь $q = 1 - p$.

Вернемся к примеру с монетой. Если A — выпадение герба, (вероятность $p=\frac{1}{2}$) и проведено, например, $n = 300$ испытаний, то для заданного числа, например, $a = 0{,}1$ получаем вероятность отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ выпадения герба от числа $p=\frac{1}{2}$ более, чем на 0,1 — меньше числа $\frac{pq}{a^2n}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}1^2\cdot 300}=\frac{1}{12}$.

Из формулы (11.1), в частности, следует, что чем больше число произведенных экспериментов n, тем меньше вероятность P отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p события A на величину, большую, чем a.

Так, например, в примере с монетой, если сделать $n = 600$, то получим $P\left(\left|\frac{m}{600}-\frac{1}{2}\right|>0{,}1\right)<\frac{0{,}5\ 0{,}5}{0{,}1^2\cdot 600}=\frac{1}{24}$.

Пример: Рассмотрим событие A — выпадение единицы при выбрасывании игрального кубика. Задана вероятность $P(A)=p=\frac{1}{6}$. *Пусть задано* *число* $a = \frac{1}{36}$ *. Сколько раз следует подбросить кубик, чтобы вероятность P отклонения относительной частоты* $\frac{m}{n}$ *от вероятности* $p = \frac{1}{6}$ *на величину, большую* $\frac{1}{36}$ *была менее* $\frac{1}{10}$ *?*

Решение: Воспользуемся неравенством Чебышева (11.1)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{36}\right) < \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{36^2} \cdot n} = \frac{1}{10}$$ *; Пришли к уравнению:* $\frac{5 \cdot 36}{n} = \frac{1}{10}$

n=1800.

Ответ: 1800 выбрасываний.

Вопрос классу для обсуждения: решим неравенство $\left|\frac{m}{1800} - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{36}$ *. Что означает полученный результат?*

Ответ: Решением неравенства является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} m > 350 \\ m < 250 \end{array}\right.$$.

Вероятность того, что единица выпадет меньше 250 раз или больше 350 раз при 1800 выбрасываниях, — менее 0,1.

При решении задач иногда бывает удобно воспользоваться оценкой

$$pq \le \frac{1}{4} \qquad \textbf{(11.2)}$$

Здесь p **— вероятность наступления некоторого события при повторных испытаниях** $q = 1 - p$**. В самом деле,**

$$Max\,(pq) = max\,(p(1-p)) = max\,(p - p^2) = \frac{1}{4} \text{ (при } p = \frac{1}{2}\text{)}$$

(График функции $p - p^2$ **— парабола, ветвями «вниз»).**

Пример:

Вероятность наступления события А при повторных испытаниях известна и равна р. Сколько раз следует повторить опыт, чтобы вероятность Р отклонения $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ относительной частоты $\frac{m}{n}$ от р более,чем на 0,1 не превышала а) 0,2 б) 0,1 в) 0,05?

Решение: а) Воспользуемся формулой (10.1). По условию,

$a = 0{,}1$, $\frac{p\cdot q}{a^2\cdot n} < 0{,}2$, *или, с учетом оценки (10.2),*

$$\frac{\frac{1}{4}}{0{,}1^2 n} < 0{,}2, \text{ откуда получим } n > 125.$$

б) Рассуждая аналогично п. а), получим неравенство

$$\frac{\frac{1}{4}}{0{,}1^2 n} < 0{,}1,\ n > 250.$$

в) $$\frac{\frac{1}{4}}{0{,}1^2 n} < 0{,}05,\ n > 500.$$

Как видим, чем выше требования к надежности результата, тем больше опытов нужно произвести.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько надо сделать опытов, чтобы равенство $p \approx \frac{m}{n}$ с точностью 0,01 получить с вероятностью 0,95?

2. Какова вероятность равенства $p \approx \frac{m}{n}$ с точностью до 0,1 при 100 опытах?

<u>Тема 12. Случайная величина и ее распределение</u>

Пример 1: Случайная величина X — сумма очков, выпавших при однократном выбрасывании двух игральных кубиков. Все возможные значения X могут принимать целочисленные значения от 2 (выпало две единицы) до 12 (выпало две шестерки).

Рассчитаем вероятность появления каждого значения X. Всего сочетаний двух цифр может быть 36 (по правилу умножения). При этом $X = 2$ может получиться только в одном случае из 36, а именно, когда выпадают две единицы. Значит, $P(X=2)=\frac{1}{36}$. Сумма $X = 3$ может быть получена двумя способами: 1+ 2 и 2 + 1. Значит, $P(X=3)=\frac{2}{36}$. Рассуждая подобным образом, получим таблицу распределения случайной величины по ее вероятности.

Таблица 12.1

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Или закон распределения случайной величины, заданный таблицей 12.1.

Здесь любое частное значение случайной величины X является элементарным событием, а все значения образуют полную группу элементарных событий (*см.* тему 3) так, что их суммарная вероятность равна единице. Последнее служит средством контроля правильности построения таблицы. (Легко проверить, что $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+...+\frac{1}{36}=1$).

Это пример закона распределения конечной **дискретной случайной величины**, т.е. такой, когда возможных значений x_i величины X конечное множество.

Приведем пример распределения **непрерывной случайной величины** по ее вероятности.

Пример 2: Гора арбузов содержит плоды, масса которых X (в кг) различна. Все арбузы разделим на группы: массой до 2 кг, от 2 до 4 кг, от 4 до 6 кг, от 6 до 8 кг, от 8 до 10 кг и свыше 10 кг.

Экспериментально установим следующую зависимость:

Таблица 12.2

X	До 2 кг	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	≥ 10 кг
P	0,06	0,16	0,26	0,28	0,19	0,05

Таблица 12.2 отражает закон распределения случайной непрерывной величины. Контроль :

$$\sum P_i = 0{,}06 + 0{,}16 + 0{,}26 + 0{,}28 + 0{,}19 + 0{,}05 = 1$$

Случайная величина в данном примере — масса одного арбуза — непрерывна, поскольку может принимать любые действительные значения на соответствующих промежутках.

Практически таблицу распределения случайной непрерывной величины — массы арбузов можно построить, например, так. После продажи n = 10 000 по данным кассовых чеков заполняют вторую строку таблицы 12.3:

Абсолютная частота М = $m(x)$ (числа — условные)

Таблица 12.3

X, кг	До 2 кг	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	≥ 10	Контроль
Абсолютная частота m, штук	600	1600	2600	2800	1900	500	$\sum m_i = n =$ $= 10\,000$
Относительная частота $w = \frac{m}{n}$	0,06	0,16	0,26	0,28	0,19	0,05	
P≈w	0,06	0,16	0,26	0,28	0,19	0,05	$\sum p_i = 1$

Поскольку исследованию подвергалось много арбузов, то по закону больших чисел считаем вероятность попадания случайной массы в «свой» промежуток, равный относительной частоте.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Одновременно подбрасывают игральный кубик с размеченными гранями от 1 до 6 и правильный тетраэдр с гранями, размеченными от 1 до 4. Построить таблицу распределения случайной величины X, представляющей собой сумму числа, выпавшего на верхней грани кубика, и числа на нижней грани тетраэдра.

2. Одновременно подбрасывают три монеты. Случайная величина X — число выпадений герба. Задайте закон распределения X в виде таблицы.

3. В примере 2 разделим арбузы на группы до 2 кг, от 2 до 3 кг, от 3 до 4 кг и т.д., получив следующую зависимость (таблицу):

X, кг	до 2	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)	≥ 10
Абсолютная частота *m*, штук	600	700	900	1200	1400	1500	1300	1000	900	500

Записать в табличной форме закон распределения величины X по вероятностям, приняв приближенно вероятности равными относительным частотам.

4. В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся 11 класса:

44	42	40	46	48	44	42	50	44	52
48	50	44	52	54	50	48	52	48	50
46	50	48	52	50	44	48	46	48	50
46	46	50	48	50	46	48	52	50	48
50	52	48	46	52	52	46	48	50	52

По этим данным составьте таблицу распределения значений случайной величины X — размер одежды учащихся по частотам (m) и относительным частотам (w).

Тема 13. Полигон и гистограмма

Пример 1: Рассмотрим таблицу распределения значений дискретной случайной величины X — размера одежды одиннадцатиклассников по абсолютным частотам m (после обследования n = 50 человек).

Таблица 13.1

X	40	42	44	46	48	50	52	54
m	1	2	5	8	12	12	9	1
w_i	0,02	0,04	0,10	0,16	0,24	0,24	0,18	0,02

В системе координат X, m, подобрав произвольно масштаб, отметим точки с координатами (X_i,m_i) (рис. 13.1). Если соединить последовательно построенные точки, то полученная ломанная называется **полигоном частот** (абсолютных). Аналогично вводится ломанная — полигон относительных частот. Если каждому значению X_i

таблицы 13.1 соотнести значение относительной частоты $w_i = \dfrac{m_i}{n}$, то ломаная, последовательно соединяющая точки $(X_i m_i)$ — полигон относительных частот. Поскольку абсолютную частоту m_i и относительную w_i связывает линейная зависимость: $m_i = w_i \cdot n$, то можно считать, что полигоны абсолютной и относительной частоты изображаются одной и той же ломаной линией, только в разных масштабах.

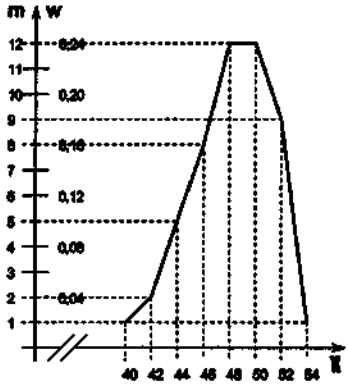


Рис. 13.1

***Пример 2:** Рассмотрим таблицу распределения непрерывной случайной величины X — массы одного арбуза по абсолютной частоте m в проданных n = 10 000 арбузах. При этом все арбузы разобьем на подмножества, определяемые первой строкой таблицы:*

Подмножества X, кг	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12]
Частота m (количество арбузов в подмножестве)	600	1600	2600	2800	1900	500
Относительная частота $w = \dfrac{m}{n}$	0,06	0,16	0,26	0,28	0,19	0,05
$\dfrac{w}{h}$	0,030	0,080	0,130	0,140	0,095	0,025

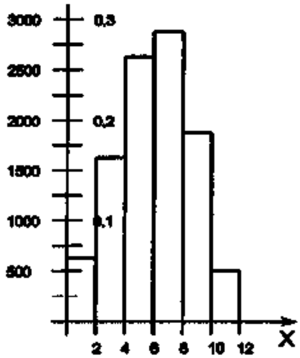


Рис. 13.2

Строим ступенчатую фигуру (рис. 13.2) в системе координат (X, m) так, что основанием каждого прямоугольника служит промежуток, равный длине подмножества X, а высотой — соответствующая абсолютная частота m (количество арбузов). Построенная фигура называется **гистограммой** абсолютных частот. Если построить ступенчатую фигуру в системе координат (X, w), то получим гистограмму относительных частот (1-я и 3-я строки таблицы). В связи с тем, что величины m и w пропорциональны, можно считать, что гистограммы m и w изображаются одной и той же ступенчатой фигурой, только в разных масштабах.

Сделаем важные замечания:

1) Промежутки на оси X при построении гистограмм выбираются равными между собой. В примере 2 эти промежутки $h = 2$ (кг).

2) По оси ординат обычно выстраиваются не величины w_i относительных частот, а пропорциональные им величины $\frac{w_i}{h}$ (*см.* рис 13.3). В примере 2 добавим четвертую строку $\frac{w}{h} = \frac{w}{2}$ и строим гистограмму системе координат $(X, \frac{w}{h})$ (рис. 13.3) Такая гистограмма обладает замечательным свойством: ее площадь равна единице, а площадь каждого прямоугольника равна w_i — относительной частоте (проверьте!).

Значение $\dfrac{w_i}{h}$ на каждом промежутке оси X называется плотностью относительной частоты на этом промежутке.

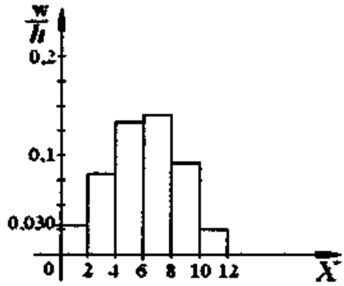


Рис. 13.3

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить полигон абсолютных и относительных частот по данному распределению случайной величины (*см.* таблицу).

X	2	3	5	6
M	10	15	5	20

2. Радиопрограмма «Крутой соловей» в течение дня передала в эфир 100 песен, в том числе продолжительностью до 2 минут — 12 песен, от 2 до 4 минут — 16 песен, от 4 до 6 минут — 40 песен, от 6 до 8 минут — 25 песен, от 8 до 10 минут — 7 песен.

Постройте гистограмму относительных частот исполнения песен программой, а также гистограмму плотности относительной частоты.

3. Используя гистограмму плотности относительной частоты в предыдущей задаче, найдите относительную частоту исполнения песен: а) продолжительностью до 4 минут; б) продолжительностью от 4 до 8 минут.

Тема 14. Статистические характеристики рядов данных
Математическое ожидание случайной величины

Пример 1: Прибыл вагон с пшеницей и требуется определить количество (долю) клейковины в ее зернах. Все зерна вагона называются генеральной совокупностью. Однако исследованию будут подвергнуты не все зерна, а какая-то их часть. Эта часть называется ***выборочной совокупностью****, или просто* ***выборкой****. Понятно, что выборка должна хорошо отражать свойства всей пшеницы вагона, т.е. должна быть* ***репрезентативной****. Например, если для исследования одного вагона взяли десяток зерен из одной точки вагона, а для исследования другого вагона взяли пять проб по сто зерен из разных точек вагона, то вторая выборка очевидно более репрезентативна, чем первая.*

Пример 2: Обувная фабрика планирует выпуск зимней мужской обуви. Обувщикам нужно знать, сколько процентов мужчин носят каждый из существующих размеров обуви. Здесь генеральная совокупность — все мужчины — возможные покупатели обуви. Однако исследование проводится на выборке, скажем, из 50 случайно отобранных мужчин. Прежде чем приступить к исследованию, данные по признаку — размер обуви — располагают в порядке неубывания или невозрастания признака. Такой ряд чисел называют ***вариационным****. Пусть, например, в результате уличного опроса получился ряд из 50 размеров мужской обуви (см. табл. 14.1).*

Таблица 14.1

25	21	20	27	31	32	25	26	28	28	31	27	24	25	27
21	25	26	26	28	27	27	30	27	31	30	29	29	27	26

28	27	26	25	28	29	27	26	22	23
30	25	24	23	32	28	27	26	27	26

Построим вариационный ряд по возрастанию признака (табл. 14.2).

Таблица 14.2

20	21	21	22	23	23	24	24	25	25	25	25	25	25	26
27	27	27	27	27	27	27	27	28	28	28	28	28	28	29

26	26	26	26	26	26	26	27	27	27
29	29	30	30	30	31	31	31	32	32

Пользуясь вариационным рядом, легко построить уже знакомую нам таблицу распределения случайной величины по ее абсолютным частотам (табл. 14.3, первые две строчки) и по ее относительным частотам (табл. 14.3, третья строка).

Таблица 14.3

X — исследуемый признак (размер)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	Контроль
m — частота	1	2	1	2	2	6	8	11	6	3	3	3	2	$\sum m_i = 50 = n$
$w = \frac{m}{n}$ — относительная частота	0,02	0,04	0,02	0,04	0,04	0,12	0,16	0,22	0,12	0,06	0,06	0,06	0,04	$\sum w_i = 1$

Введем ряд важных понятий, используемых в статистике, на примере вариационного ряда табл. 14.2.

Размахом выборки R называется разность между ее наибольшим и наименьшим значениями. В данном случае $R = 32 - 20 = 12$.

Модой выборки Mo называется значение случайной величины, встречающееся в выборке чаще всего. В данном случае $Mo = 27$.

Медианой выборки Me называется среднее число (т.е. стоящее на среднем месте в выборке), если количество чисел нечетное и среднее арифметическое двух срединных чисел, если их количество в выборке четное. В нашем примере на 25 и 26 местах стоит размер 27,

значит, $Me = \frac{27+27}{2} = 27$.

Средним значением $\overline{X}$ выборки X называется среднее арифметическое всех ее значений: $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$. В нашем примере:

$$X = \frac{20 + 21 + 21 + 22 + 22 + \dots + 32 + 32}{50} =$$

$$= \frac{20\cdot1+21\cdot2+22\cdot1+23\cdot2+24\cdot2+25\cdot6+26\cdot8+27\cdot11+28\cdot6+31\cdot3+32\cdot2+29\cdot3+30\cdot3}{50} =$$

$$= \frac{1335}{50} = 26{,}7.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В таблице приведены расходы старшеклассника за 4 дня:

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг
Расходы (руб.)	18	25	24	25

Некто обработал эти данные и записал следующее:

а) 18 + 25 + 24 + 25 = 92; 92:4 = 23. [ ] = 23 (руб.);

б) 18, 24, 25, 25; (24 + 25):2 = 24,5. [ ] = 24,5 (руб.);

в) 18, 25, 24, 25; [ ] = 25 (руб.);

г) 25 – 18 = 7. [ ] = 7 (руб.).

В квадратных скобках должны быть указаны наименования статистических характеристик. Определите, какая статистическая характеристика находится в каждом задании.

Ответ: а) среднее арифметическое; б) среднее значение двух рядом стоящих в середине чисел, то есть медиана; в) самое распространенное число ряда, то есть мода; г) разность между наибольшим и наименьшим числами, то есть размах.

2. Найдите медиану следующих рядов данных:

а) 8, 4, 9, 5, 2; б) $\frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{16}, \frac{3}{8}$.

3. На стадионе «Локомотив» была зафиксирована следующая посещаемость первых четырех футбольных матчей: 24 532, 18 711, 22 871, 24 334. Какова была средняя посещаемость (среднее арифметическое) этих матчей? Чему равен размах посещаемости?

4. В течение года Лена получала следующие отметки за контрольные по алгебре: одну «двойку», три «тройки», четыре «четверки» и три «пятерки». Найдите среднее арифметическое, моду и медиану этих данных.

<u>Примечание</u>: Если ряд содержит нечетное количество чисел, то медиана — число, лежащее точно посередине упорядоченного ряда. Если количество чисел четно, то медиана — среднее двух чисел, расположенных посередине упорядоченного ряда. До сих пор мы находили медиану среди значений, ни одно из которых не встречается более одного раза. Для того чтобы использовать определение, данное в учебнике, можно выписать в ряд все значения рассматриваемой величины (отметки) в порядке возрастания в том количестве, которое имеется. Получилось 11 значений — нечетное число. Значит, медианой является элемент, который находится на среднем месте упорядоченного ряда.

Вместе с тем, можно найти значение медианы, не выстраивая всех значений ряда. Такой способ заключается в том, что вначале рассчитывается общее число элементов ряда: 1 + 3 + 4 + 3 = 11. Значит, медиана — число, стоящее на шестом месте упорядоченного ряда. Теперь устанавливаем, какая оценка окажется на шестом месте: судя по исходной таблице, сначала — одна еди-

ница, затем — три тройки — итого четыре, затем — четыре четверки — значит, на шестом — четверка.

Такой способ нахождения медианы особенно эффективен, когда в ряду много разных групп чисел.

Этот способ желательно получить с помощью класса.

5. Маша, Саша, Катя, Лена, Ваня и Миша пошли в пиццерию. Ваня съел 5 кусков пиццы, Миша, Саша, Лена — по 3 куска, Катя — 2 куска, Маша — 1 кусок. 1) Найдите все известные вам статистические характеристики этих данных. 2) Если бы Ваня съел не 5, а 7 кусков пиццы, как бы изменились эти величины?

6. У группы из 20 старшеклассников спросили, сколько примерно часов в день они тратят на приготовление домашних заданий. Ответы школьников представлены на диаграмме, изображенной на рисунке (рис. 14.1).

а) Сколько времени в день в среднем тратит ученик из этой группы на приготовление домашних заданий? (Найдите среднее арифметическое этого ряда данных.)

б) Сколько времени тратит средний ученик на приготовление домашних заданий? (Найдите медиану этих данных.)

в) Сколько времени тратят на приготовление домашних заданий большинство из этих ребят? (Найдите моду этих данных.)

г) Представьте эти данные в виде таблицы частот:

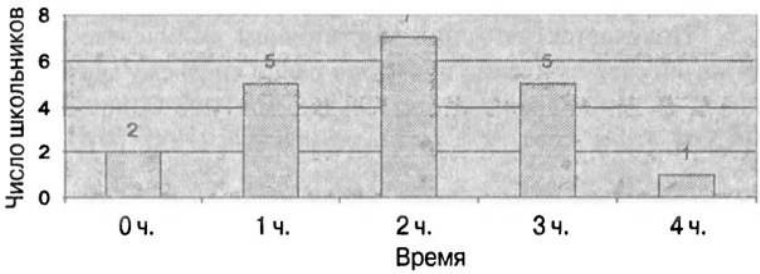


Рис. 14.1

Особый интерес представляет **математическое ожидание** случайной величины.

Пример: Пусть дана, например, таблица 12.1 распределения случайной величины X — суммы очков, выпавших при однократном подбрасывании двух игральных кубиков, по ее (суммы очков) вероятности P:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Математическое ожидание (обозначается MX) находится как сумма произведений:

$$MX = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_{11}x_{11} = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \frac{3}{36}\cdot 4 + \frac{4}{36}\cdot 5 + \frac{5}{36}\cdot 6 + \frac{6}{36}\cdot 7 + \frac{5}{36}\cdot 8 + \frac{4}{36}\cdot 9 + \frac{3}{36}\cdot 10 + \frac{2}{36}\cdot 11 + \frac{1}{36}\cdot 12 =$$

$$= 7\frac{5}{18} \approx 7{,}28.$$

Вообще, **математическим ожиданием дискретной случайной величины** называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i\ . \qquad (14.1)$$

<u>Замечание</u>: Известно, что при большом количестве испытаний вероятность наступления какого-либо события примерно равна его относительной частоте: $p_i \approx w_i = \frac{m_i}{n}$, здесь m_i — абсолютная частота появления i — того события из общего числа испытаний n. Рассмотрим, например, табл. 13.3 распределения случайной величины — размера обуви. Математическое ожидание этой величины:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n \approx x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n =$$

$$= x_1\frac{M_1}{n} + x_2\frac{M_2}{n} + \ldots + x_n\frac{M_n}{n} = \frac{x_1M_1 + x_2M_2 + \ldots + x_nM_n}{n} = \overline{X}$$

Получается, что при достаточном количестве испытаний математическое ожидание примерно равно среднему значению величины X. В данном конкретном случае, как уже было подсчитано, $MX \approx \overline{X} = 26{,}7$.

УПРАЖНЕНИЕ

7. Закон распределения случайной величины задан таблицей:

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти математическое ожидание этой величины.
Ответ: 5,1.

Т е м а 15. Отклонение от среднего значения, дисперсия, среднее квадратичное отклонение

Пример: На столе лежат пять картофелин с массой $x_1 = 150$ г; $x_2 = 125$ г; $x_3 = 85$ г; $x_4 = 80$ г; $x_5 = 70$ г (картофелины ранжированы по невозрастанию массы).

Средний вес картофеля: $\overline{X} = \dfrac{150+125+85+80+70}{5} = 102$ *(г).*

Отклонениями от среднего веса являются разности $x_i - \overline{X}$. В данном случае $x_i - \overline{X}$ составляют соответственно: 150 – 102 = 48; 125 – 102 = 23; 95 – 102 = –17; 80 – 102 = –22; 70 – 102 = –32.

Контроль: сумма отклонений равна нулю: 48 + 23 – 17 – 22 – 32 = 0.

Вообще, отклонением дискретной случайной величины x_i от ее среднего значения $\overline{X}$ называется разность $x_i - \overline{X}$.

Продолжим рассмотрение «картофельного» примера. Построим следующую таблицу :

x_i	150	125	85	80	70
$x_i - \overline{X}$	48	23	–17	–22	–32
$(x_i - \overline{X})^2$	2304	529	289	484	1024

Первая строка — вариационный ряд случайной величины x — массы картофеля. Второй ряд — отклонения случайной величины x от ее среднего значения. Третья строка — квадраты этих отклонений $(x_i - \overline{X})^2$. Последняя строка позволяет найти еще одну важную статистическую характеристику: дисперсию D — среднее арифметическое квадратов всех отклонений, а именно:

$$D = \frac{2304+529+289+484+1024}{5} = 926.$$

Вообще, **дисперсией** *называется среднее арифметическое квадратов всех отклонений от среднего заданных n значений случайной величины:*

$$D = \frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$$

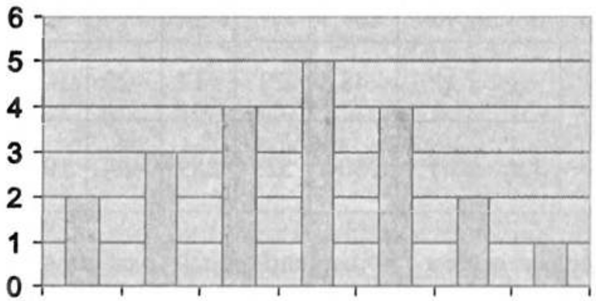
Еще одна важная статистическая характеристика — **среднее квадратическое отклонение** σ (обозначается буквой «сигма»).

По определению $\sigma = \sqrt{D}$.

Для нашего примера $\sigma = \sqrt{926} \approx 30{,}4$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Жалобы на опоздания электричек, поступившие в диспетчерскую станции Семафорово в течение недели, позволили составить следующую диаграмму частот по опозданиям за неделю:



Определите среднее число опозданий в день за неделю и среднеквадратичное отклонение.

2. На стройку с кирпичного завода привезли 20 упаковок кирпича. Чтобы проверить качество партии, из каждой упаковки вытащили случайным образом по кирпичу и замерили длину каждого. Ниже представлены полученные величины (в см): 20,5; 20,1; 21,3; 20,3; 19,8; 19,2; 20,1; 19,6; 20,2; 20; 20,5; 19,7; 19.9; 20,5; 19,6; 20,1; 19,4; 19,8; 19,1; 20,3.

а) Определите среднюю длину кирпича.

б) Найдите величину среднеквадратичного отклонения длины кирпича от средней.

в) Какой процент кирпичей, длина которых отличается от средней больше, чем на 0,2 см? Больше чем на величину среднеквадратичного отклонения?

3. Пасечник заметил, что пчелы в двух его ульях производят мед неравномерно. Раз в 10 дней он вынимал соты из улья и заносил в таблицу массу (в кг) снятого меда, выработанного пчелами за десять дней.

а) Пчелы какого из ульев работают более стабильно? (Сделайте вывод, вычислив величину среднеквадратичного отклонения количества произведенного меда.)

б) Если в первом улье живет 100 пчел, а во втором 75 пчел, то сколько в среднем произвела меду за период с 19 по 28 августа каждая пчела 1 и 2 улья?

Интервалы времени	Масса меда (в кг)	
	1-й улей	2-й улей
С 20 по 30 апреля	11,4	11,9
С 1 апреля по 10 мая	12	10,8
С 11 по 20 мая	11,5	13,2
С 21 по 30 мая	11,7	12,6
С 31 мая по 9 июня	11	11,1
С 10 по 19 июня	10,6	11,4
С 20 по 29 июня	13,1	13,2
С 30 июня по 9 июля	12.8	12,9
С 10 по 19 июля	11,9	13,5
С 20 по 29 июля	13	10,9
С 30 июля по 8 августа	12,5	12,3
С 9 по 18 августа	12,9	11,7
С 19 по 28 августа	11,6	12
С 29 августа по 8 сентября	12	10,5

<u>*Тема 16*. Функция распределения плотности вероятности*</u>

Пример: *Вернемся к примеру, связанному с радиопрограммой «Крутой соловей». Там предлагалась следующая выборка по продолжительности исполняемых песен: (табл. 16.1, первые две строки):*

Таблица 16.1

Для $h = 2$:

	X, мин	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10]	
	m, штук	12	16	40	25	7	Всего $n = 100$
	$w = \frac{m}{100}$	0,12	0,16	0,40	0,25	0,07	

$h=2$	$\frac{w}{h}$	0,060	0,080	0,200	0,125	0,035	

Для $h = 1$:

	X, мин	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)	
	m, штук	5	7	7	8	15	25	15	10	5	2	Всего $n = 100$
	$w = \frac{m}{100}$	0,05	0,07	0,07	0,08	0,15	0,25	0,15	0,10	0,05	0,02	
$h = 1$	$\frac{w}{h}$	0,05	0,07	0,07	0,08	0,15	0,25	0,15	0,10	0,05	0,02	

На основании первых двух строк строим строку относительной частоты $w = \frac{m}{100}$ и строку плотности относительной частоты $\frac{w}{h}$, где шаг h принят равным 2 (мин). На основе первой и четвертой строк таблицы 16.1 строим гистограмму плотности распределения относительной частоты исполнения песен различной длительности (*см*. рис. 16.1).

А теперь разобьем выборку из 100 песен на более мелкие подгруппы, продолжительностью [0;1), [1;2), [2;3) и т.д. минуты (пятая строка таблицы) и соответствующие абсолютные частоты m (штук) — шестая строка таблицы (считаем, что соответствующие данные известны). Затем рассчитаем относительную частоту w — (седьмая строка) и ее плотность (8-я строка). Наложим новую гистограмму ($X - \frac{w}{h}$) на прежнюю. Обе гистограммы строим в одном масштабе. Как видим, вторая гистограмма уточняет первую. Обе они имеют одну и ту же ширину [0;10] и площадь, равную единице.

При больших выборках, относительная частота подмножеств выборки приблизительно равна их вероятности: $w_i \approx D_i$.

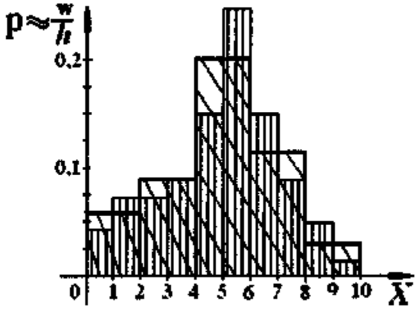


Рис. 16.1

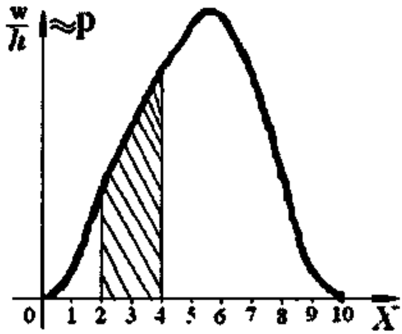


Рис. 16.2

Если продолжить уменьшение шага h (при соответствующем увеличении выборки n), граница гистограммы будет стремиться к некоторой кривой (рис. 16.2), которую можно назвать кривой распределения плотности относительной частоты случайной величины X. Поэтому кривую (рис. 16.2) можно считать графиком функции распределения плотности вероятности случайной величины X.

Замечание: График по рис. 16.2 позволяет найти относительную частоту исполнения песен любой продолжительности, как соответствующей площади. Например, относительная частота исполнения песен длиной от 2 до 4 минут равна заштрихованной площади на рис. 16.2 (ср. с упр. № 3 темы 13).

Тема 17. Нормальное распределение Доверительный интервал*

На большом количестве экспериментов установлено, что многие случайные величины, такие, например, как рост людей и их масса, масса однотипных овощей (картофель, арбузы), промежутки времени между случайными встречами с прохожими, погрешности длины при изготовлении электродов для сварки и очень многие другие хорошо описываются с помощью функций нормального распределения плотности вероятности. Эта функция задается довольно сложной формулой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{17.1}$$

Здесь σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

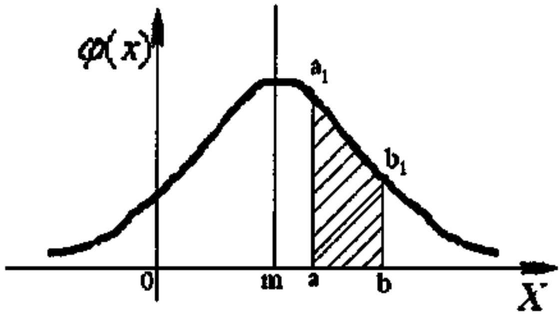


Рис. 17.1

В точке $x = m$ функция (17.1) имеет максимум $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, около которого функция $\varphi(x)$ образует колоколообразную форму (рис. 17.1), причем график симметричен относительно прямой $x = m$.

При $x \to \pm\infty$, график асимптотически приближается к оси x. Можно доказать (*см.*, напр., [6]), что предел площади под кривой (рис. 17.1) при $x \to \pm\infty$ равен единице. Как и в примере рис. 16.2, на рис. 17.1 вероятность наступления события на каком-нибудь промежутке $[a, b]$ равна площади под кривой $\varphi(x)$ на этом промежутке:

$P(x \in [a,b]) = площадь\, aa_1bb_1$. (Для нахождения площадей криволинейных трапеций под кривыми нормального распределения разработаны таблицы — *см.* [6].)

График функции (17.1) нормального распределения плотности вероятности называется **кривой Гаусса**.

Рассмотрим кривую Гаусса (рис. 17.2), где на оси X от среднего значения точки $x = m$ отложены слева и справа отрезки, равные σ. Расчеты показывают, что площадь под кривой на отрезке $[m-\sigma, m+\sigma]$ составляет примерно 0,68 или $\frac{2}{3}$ от единицы. Это означает, что случайная величина, отличающаяся на величину $\leq\sigma$ от значения m (в ту и другую сторону); имеет вероятность появления $\approx\frac{2}{3}$.

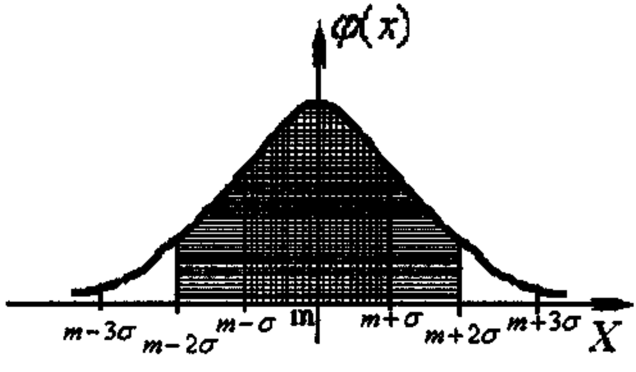


Рис. 17.2

Также доказано, что случайная величина в пределах от $[m-2\sigma, m+2\sigma]$ имеет вероятность появления примерно в 96% всех известных случаев. И наконец, для нормального распределения случайных величин на промежутке $[m-3\sigma, m+3\sigma]$ вероятность появления случайной величины составляет 0,997 (правило трех сигм). Последнее означает, что с надежностью 0,997 любая нормально распределенная случайная величина отклоняется от среднего значения m не более, чем на три σ.

Изложенные свойства отклонений ожидаемых случайных величин от их средних значений m могут быть истолкованы так:

Пусть m — математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X, σ — среднее квадратичное отклонение величины X от ее среднего значения. Тогда с надежностью $P = 0{,}68$ случайная величина окажется в интервале $[m-\sigma, m+\sigma]$; с надежностью $P = 0{,}96$ случайная величина окажется в интервале $[m-2\sigma, m+2\sigma]$ и, наконец, с надежностью $P = 0{,}997$ случайная величина окажется в интервале $[m-3\sigma, m+3\sigma]$. Соответственно, перечисленные интервалы называют доверительными с заданной надежностью.

Пример: Средняя продолжительность текущего ремонта автобуса в мастерской $m = 30$ суток; среднее квадратичное отклонение от этой продолжительности $\sigma = 2$ суток. С надежностью $P = 0,96$ рассчитайте оптимистический и пессимистический прогнозы выбывания автобуса из эксплуатации.

<u>Решение</u>: С надежностью 0,96, доверительный интервал продолжительности ремонта составляет $[30 - 2 \cdot 2;\ 30 + 2 \cdot 2] = [26;\ 34]$. Пессимистический прогноз — 34 суток, оптимистический – 26 суток.

Ответ: 34; 26.

Более подробно с расчетом доверительных интервалов можно познакомиться, например, в [6].

Ответы и решения упражнений

Тема 1

1. Ответ: A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 2, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57}.
3. Ответ: а) {∅}, {к}, {у}, {к; у}.

   б) {3}, {∅}.

   в) {∅}.

   Решение:

   а) Разность $E = B \setminus A$ = {к, л, у, б} \ {б, л, е, ф} = {к, у}. Перебором находим все подмножества (включая пустое и само множество E):

   {∅}, {к}, {у}, {к, у}.

   б) E = {7, 3, 2}\{4, 7, 1, 2}={3}. Подмножества: {3}, {∅}.

   в) E = {=, +} \ {/, \, –, =, +} = ∅. Подмножества: {∅}
4. Ответ: а) $n(E) = 0$, $n(D) = 3$, $n(C) = 9$, $n(K) = 6$;

   б) $n(E) = 7$, $n(D) = 0$, $n(C) = 7$, $n(K) = 0$.

   Решение:

   а) Раскроем множества A и F:

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; из условия $E = A \setminus F = \varnothing$;

   $D = F \setminus A = \{0, 7, 8\}$; $C = A \bigcup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

   $K = A \bigcap F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Непосредственно, из раскрытых множеств имеем:

   $n(E) = 0$, $n(D) = 3$, $n(C) = 9$, $n(K) = 6$.

   б) Раскроем множества A и F: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $F = \varnothing$. Из условия:

   $E = A \setminus F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; $D = F \setminus A = \varnothing$; $C = A \bigcup F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

   $K = \bigcap F = \varnothing$. Непосредственно, из раскрытых множеств имеем:

   $n(E) = 7$, $n(D) = 0$, $n(C) = 7$, $n(K) = 0$.
5. Ответ: квадраты.

   Решение:

   1) Прямоугольник — это параллелограмм с прямыми углами.
      Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.
   2) Пересечение — параллелограмм с равными между собой сторонами и прямыми углами, а это — квадрат.

6. Ответ: $W_1=\{a, c, f, k\}$, $W_2=\{a, c, f, l\}$, $W_3=\{a, b, c, f\}$, $W_4=\{a, c, f, k, l\}$,

   $W_5=\{a, b, c, f, k\}$, $W_6=\{a, b, c, f, l\}$, $W_7=\{a, b, c, f, k, l\}$.

   Решение:

   Из условия следует, что множество M содержит элементы множества W без элементов множества K.

   Следовательно, множество W должно содержать все элементы множества M, а также – любые элементы множества K или совсем не содержать других элементов. Значит, множество W обязательно содержит элементы $\{a, c, f\}$, а также любые наборы элементов из $\{k, l, b\}$ и ∅.

   Получаем следующий набор ответов: $W_1=\{a, c, f, k\}$, $W_2=\{a, c, f, l\}$,

$W_3 = \{a, b, c, f\}$, $W_4 = \{a, c, f, k, l\}$, $W_5 = \{a, b, c, f, k\}$, $W_6 = \{a, b, c, f, l\}$,

$W_7 = \{a, b, c, f, k, l\}$.

Убедимся, например, в правильности ответа W_5:

$W_5 \setminus K = \{a, b, c, f, k\} \setminus \{k, l, b\} = \{a, c, f\} = M$.
Примечание. На этом примере хорошо видна разница между уравнением $M = W - P$, из которого не следует $W = M + P$, и алгебраическим уравнением $a = b - c$, из которого следует $b = c + a$.

7. Ответ:

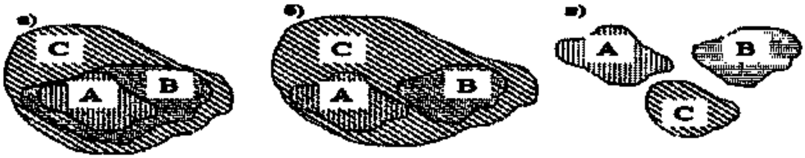


Рис. 1.4

Решение:
а) Включение $A \subset C$ соответствует положению контура A внутри контура C; включение $B \subset C$ соответствует положению контура B внутри контура C; разность $A \setminus B = \varnothing$ означает, что нет участка A, не принадлежащего B, т.е. все точки фигуры A принадлежат также множеству B (рис. 1.4 а).
б) Контуры A и B лежат внутри контура C, но не пересекаются между собой. (рис. 1.4 б).
в) Все три контура A, B и C попарно не пересекаются (рис. 1.4 в).

8. Ответ: а) $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$.

б) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; другое решение $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

в) $A \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))$.

9. Ответ: 15.
Решение:
Пусть A — множество стрелков, $m(A) = 5$; B — множество мишеней, $n(B) = 3$; всего выстрелов $mn = 5 \cdot 3 = 15$.

Тема 2 п. 1

1. Ответ: 24 360 способов.

Решение:
Каждый способ выбора отличается от любого другого либо составом тройки, либо должностью внутри тройки. Значит, нужно найти количество всех троек, отличающихся друг от друга либо порядком, либо хотя бы одним элементом, а это — число размещений из 30 по 3: $A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$.

2. Ответ: 60 чисел.

Решение:
Все трехзначные числа по условию различаются либо порядком цифр, либо их набором, значит искомое число $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

3. Ответ: 48 чисел.

Решение:

Если бы вместо нуля была задана, например, цифра 9, то задача свелась бы к предыдущей, и ответ составил бы 60, но числа не начинаются с нуля. Если бы числа можно было бы начать с нуля, то их было бы 1/5 из 60 чисел (всего чисел 60, из них 1/5 начинается с нуля, 1/5 – с единицы и т.д.). Значит, нужно из общего числа размещений A_5^3 отбросить одну пятую: $\frac{1}{5} \cdot 60 = 12$. Остается 60 – 12 = 48 размещений.

4. Ответ: 120 способов.

Решение:

Каждая «шутка» отличается составом жертв, а также весом камней в рюкзаке каждого. Моделью всевозможных вариантов являются всевозможные размещения из 6 элементов по 3: $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Тема 2 п. 2

1. Ответ: 24 способа.

Решение:

Возможные комбинации рассаживания будут отличаться только порядком. Значит, это — всевозможные перестановки из 4 элементов: $P_4 = 4! = 24$.

2. Ответ: 17 280 способов.

Решение:

Пиццы можно съесть $P_4 = 4! = 24$ способами, пирожные $P_6 = 6! = 720$ способами; но каждому способу поглощения пицц соответствует 720 возможностей поедания пирожных. Значит, для Толстого Васи существует $P_4 \cdot P_6 = 24 \cdot 720 = 17280$ способов позавтракать (правило умножения).

3. Ответ: 1) 5040 способов; 2) 1440 способов.

Решение:

1) Из семерых гостей можно образовать $P_7 = 7! = 5040$ перестановок.

2) Ваня может сидеть либо слева от Ани, либо справа. (Соответствующее число перестановок $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$.) Остальных шестерых гостей можно рассадить P_6 перестановками: $P_6 = 6! = 720$, причем, каждому порядку «Аня — Ваня» соответствует все 720 перестановок других гостей. Всего, по правилу умножения, получается $P_2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440$ способами.

4. Ответ: 1) 720 способов; 2) 240 способов.

Решение:

1) Взаимное расположение Ани и Вани зафиксировано. На остальные шесть стульев, очевидно, можно рассадить гостей перестановками из 6 элементов: $P_6 = 6! = 720$.

2) Расположение Ани и Тани зафиксировано. Тройка Аня, Ваня, Таня может расположиться двумя способами (Ваня слева от Ани или справа). Оставшихся гостей можно рассадить перестановками из пяти элементов: $P_5 = 5! = 120$. Каждому расположению Ани, Вани и Тани соответствует все 120 вариантов расположения остальных гостей, поэтому всего вариантов $2 \cdot 120 = 240$ способов.

Тема 2 п. 3

1. Левая часть $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$;

правая часть: $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

2. Воспользуемся формулами (2.6) и (2.3). Левая часть:

$$C_n^k + C_n^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1) \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n!(n-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!(n-k)} = \frac{n! k + n! + n! n - n! k}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!};$$

Правая часть: $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1))!} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$

3. Ответ: 45 рукопожатий.

Решение:

Каждому рукопожатию соответствует сочетание из десяти человек по два. Всего число таких сочетаний $C_{10}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

4. Ответ: 220 треугольников.

Решение:

Поскольку любым трем точкам соответствует один из треугольников, то всего можно построить треугольников столько, сколько всевозможных сочетаний по три точки можно отобразить из двенадцати: $C_{12}^3 = \dfrac{A_{12}^3}{P_3} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$.

5. Ответ: 1) 61 прямая; 2) 656 треугольников.

Решение:

1) Из C_{12}^3 всевозможных прямых C_4^2 сливаются в одну прямую. Поэтому

искомое число прямых: C_{12}^3 - C_4^2 +1 = $\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}-\frac{4\cdot 3}{1\ 2}+1=61$.

2) Из C_{12}^3 всевозможных треугольников C_4^3 вырождаются в отрезки, лежащие на одной прямой. Поэтому искомое число треугольников:

$$C_{12}^3 - C_4^3 = C_{12}^3 - C_4^1 = \frac{12\ 11\cdot 10}{1\ 2\ 3}-4=656$$

Тема 2. Дополнительные упражнения

1. Ответ: 2520 способами.

Решение:

Пусть первой получает подарок Даша. Его можно сделать C_{10}^2 вариантами.

Каждому варианту отбора двух слонов Даше отвечает C_8^3 вариантов подарка Саше, значит, вариантов отбора пяти слонов Даше и Саше существует

$C_{10}^2\ C_8^3$ (правило умножения). Если слоны Саше и Даше уже отобраны, то слоны для Глаши определяются однозначно. Значит, всего возможно

вариантов $C_{10}^2\cdot C_8^3=45\cdot 56=2520$.

Замечание: Очевидно, число вариантов не должно зависеть от порядка раздачи. Так, если сначала отобрать подарок Глаше (всего C_{10}^5 вариантов), потом

Саше (всего C_5^3), получим тот же ответ: $C_{10}^5\cdot C_5^3=2520$. Для внеклассного рассмотрения можно рекомендовать обобщить этот результат (m слонов, K_1, K_2, ..., K_n штук идет в подарки детям, имеющие номера 1, 2, ..., n, причем $K_1+K_2+\ldots+K_n=m$).

2. Ответ: 1) 10 способами; 2) 172 800 способами.

Решение:

1) Рассмотрим нижние полки. Из шести «капризные» пассажиры занимают три. Значит, 3 места освобождаются для любых трех «некапризных», которых

всего 10 – 3 – 2 = 5 человек. Выбрать этих трех можно $C_5^3=10$ способами. Сделав отбор на нижние полки, мы тем самым однозначно определяем всех пассажиров верхних полок. Значит, всего вариантов пассажиров для верхних

и нижних полок $C_5^3=10$.

2) Если все места нумерованы, то каждому набору пассажиров на нижние места отвечает 6! перестановок, а каждой перестановке «нижних»

пассажиров соответствует 4! перестановок «верхних». Значит, каждому набору «нижних» пассажиров соответствует 6!·4! перестановок всех пассажиров, а так как таких наборов $C_5^3 = 10$, то искомое число составит

$6! \cdot 4! \cdot C_5^3 = 720 \cdot 21 \cdot 10 = 172800$ — здесь дважды использовано правило умножения.

3. Ответ: 432 числа.

Решение:

Наборов по две четных цифры может быть C_3^2; наборов по две нечетных цифры может быть C_4^2, а так как каждой паре четных цифр можно поставить в соответствие C_4^2 пар нечетных, то всего получаем $C_3^2 \cdot C_4^2$ наборов по 4 цифры (правило умножения). Если в каждом наборе из 4-х цифр сделать всевозможные перестановки, получим 4! перестановки. Итого всех чисел получается $C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = 432$.

4. Ответ: $C_8^4 \cdot C_{10}^5 \cdot C_9^3$.

Решение:

Первую группу можно собрать C_8^4 способами. Вторую — C_{10}^5 способами. А так как каждому набору первой группы можно поставить в соответствие C_{10}^5 наборов второй, то всех комбинаций работников из первой и второй групп может быть $C_8^4 \cdot C_{10}^5$ (правило умножения). Из оставшихся 9 человек отобрать три можно C_9^3 способами, причем любому набору первой и второй групп можно подобрать третью всеми C_9^3 способами. Значит, для всех трех групп существует $C_8^4 \cdot C_{10}^5 \cdot C_9^3$ различных комбинаций работников, взятых из заданных 20.

5. Ответ: 480 «слов».

Решение:

Будем подбирать слова так. Сначала найдем всевозможные «слова» по 5 букв, образованные из слова «КРОНА». Таких слов 5! Вмонтируем теперь в любое «слово» из 5 букв еще одну букву «О» так, чтобы две буквы «О» не стояли рядом. Из шести возможных перестановок — положение новой буквы «О» — две не подходят (если новая буква «О» — слева или справа от старой). Значит, любая перестановка из пяти разных букв порождает 6 – 2 = 4 шестибуквенных слова. Всего искомое количество составит

$4 \cdot 5! = 480$ «слов».

6. Ответ: 2400 способами.

Решение:

Актрис на роли подбираем размещениями из 6 по 3: $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов. Актеров подбираем размещениями из 5 по 2: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ способов. А так как каждому способу подбора актрис можно сопоставить 20 способов подбора актеров, то по правилу умножения всего получается $A_6^3 \cdot A_5^2 = 120 \cdot 20 = 2400$ способов.

7. Ответ: C_{19}^4 $C_{15}^4 \cdot C_{11}^4$ C_7^4.

Решение:

В первый ящик всего можно отобрать C_{19}^4 разных наборов предметов. Для второго ящика можно произвольно выбирать из 19 – 4 = 15 предметов: C_{15}^4 комбинаций. Для третьего ящика всевозможные сочетания предметов составят C_{11}^4 вариантов и для четвертого: $C_7^4 = C_7^3$ вариантов. Наконец, если ящики по 4 предмета заполнены, то на долю 5-го ящика остается один набор из трех предметов.

Одному набору первого ящика можно подобрать C_{15}^4 вариантов содержимого второго. Значит, в первом и втором ящиках возможно $C_{19}^4 \cdot C_{15}^4$ вариантов выбора предметов, соответственно, в первых трех ящиках $C_{19}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot C_{11}^4$ способов, в первых четырех $C_{19}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot C_{11}^4 \cdot C_7^4$ вариантов. В этом решении трижды применено правило умножения.

<u>Тема 2.1 п. 1</u>

1. Ответ: 125 чисел.

Решение:

Трехзначные числа отличаются друг от друга либо порядком цифр, либо цифрами, но в числах цифры могут повторятся до трех раз. Значит, искомое количество составляет $\widetilde{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

2. Ответ: 90 чисел.

Решение:

Если бы числа 00, 01, 02 засчитывались как двузначные, то их количество составляло бы $A_{10}^2 = 10^2 = 100$. (от 00 до 99). Исключим все однозначные числа, включая 0 и получим 100 – 10 = 90. Этот результат легко проверить прямым перебором.

Тема 2.1 п. 2

1. Ответ: 60 чисел.

   Решение:

   Искомое количество найдем, рассчитав число перестановок $\widetilde{P}_n$ для $n = 6$ с повторениями $k_1 = 2$, $k_2 = 3$: $\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!} = \dfrac{6!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 60$

2. Ответ: 5040 «слов».

   Решение:

   Задача сводится к нахождению числа перестановок с повторениями при n=8, $K_1 = 2$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2$ (по две буквы А, Р и И) $P_8 = \dfrac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 5040$.

Тема 2.1 п. 3

1. Ответ: 220 способов.

   Решение:

   Каждый возможный набор пирожков есть сочетание десяти элементов из трех с повторениями: $\widetilde{C}_{10}^3 = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$

2. Ответ: 20 треугольников.

   Решение:

   Заданные четыре числа таковы, что любым трем из них соответствует треугольник, поскольку любые три числа удовлетворяют правилу треугольника (каждая сторона меньше суммы двух других).

   Искомое число – количество всевозможных сочетаний с повторениями из четырех элементов по три: $\widetilde{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = 20$.

Тема 2.1. Дополнительные упражнения

1. Ответ: 70 серий.

   Решение:

   Пусть выигрывает команда А. Это возможно, если счет 1) 4:0; 2) 4:1; 3) 4:2; 4) 4:3 в ее пользу. При этом возможны любые перестановки выигрышей, кроме случая, когда последний выигрыш принадлежит команде Б.

   1) Случай 4:0 образует перестановку АААА, вариант только один. Формально его можно рассчитать как $\widetilde{P}_4 = \dfrac{4!}{4!} = 1$.

   2) Случай 4:1. Из всех возможных перестановок с повторениями БАААА, АБААА, ААБАА, АААБА и ААААБ, последняя – посторонняя. Значит,

возможных серий матчей $\widetilde{P}_5 - 1 = \frac{5!}{4!} - 1 = 4$.

3) Случай 4:2. Здесь нужно найти все перестановки с повторениями за вычетом числа перестановок, заканчивающихся на Б. Всех перестановок $\widetilde{P}_6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$; в том числе перестановок, заканчивающихся на Б столько же, сколько перестановок из пяти элементов ААААБ с повторениями $\widetilde{P}_5 = \frac{5!}{4!} = 5$. Итого возможных серий 15 – 5 = 10.

4) Случай 4:3. Повторяя рассуждения для случая 3), получим искомое число как $\widetilde{P}_7 - \widetilde{P}_6 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} - \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 35 - 15 = 20$.

Всего вариантов с выигрышем А получается 1 + 4 + 10 + 20 = 35. Столько же матчей с выигрышем Б. Всего вариантов 35·2 = 70.

2. Ответ: 144 перестановки.

Решение:

Число перестановок из четырех нечетных цифр составляет $P_4 = 4! = 24$. Каждая перестановка порождает 6 «нужных» чисел. Например, 3179→231879; 321789; 312798; 831279; 381729; 318792. Используя правило умножения, получим искомое число 24·6 = 144.

3. Ответ: 96 способов.

Решение:

В слове «змееед» шесть букв с тремя повторениями. Поэтому без требования задачи о соседстве букв е, слово имеет $\widetilde{P}_6 = \frac{6!}{3!} = 120$ перестановок. Вместе с тем, каждая перестановка из трех согласных порождает 4 «ненужных» слова. Например, ееемзд, меееэд, мзееед, мздеее. Всего перестановок из трех букв мзд: $P_3 = 3! = 6$, значит, «ненужных» слов во всех перестановках из шести букв 6·4 = 24. Отсюда, «нужных» слов: 120 – 24 = 96.

4. Ответ: 24 способами.

Решение:

Перестановок из трех согласных букв — ш, р, г, существует 3! = 6. Каждой такой перестановке отвечает четыре «нужных» слова. Например, шрг→ ашараг, шарага, ашрага, ашарга. Значит, всего «нужных» слов (по правилу умножения) найдется 4·6 = 24.

Тема 3

1. Ответ: 1.

   Решение:

   Все три лошади имеют пятна, следовательно, все трое — пятнистые. Забег выигрывает одна из трех пятнистых лошадей, поэтому рассматриваемое событие (состоящее в том, что забег выиграет пятнистая лошадь) является достоверным и его вероятность равна 1. (Формально: $p = \frac{m}{n}$, где $n = 3$, $m = 3$,

   $$p = \frac{m}{n} = \frac{3}{3} = 1)$$

2. Ответ: 0.

   Решение:

   Среди конфет, имеющихся в ассортименте ирисок, нет, значит, Петя не сможет их купить и рассматриваемое событие (состоящее в том, что Петя полакомиться ириской) является невозможным. Его вероятность равна 0.

3. Ответ: 0,12.

   Решение:

   Всего синих яиц в корзине у зайца было 3 (25 – 7 – 10 – 5 = 3). Используя классическое определение, имеем: всего элементов (яиц): 25 (значит, $n = 25$), из них синих – 3 ($m = 3$), получаем: $P(A) = \frac{3}{25} = 0{,}12$.

4. Ответ: 1) $\frac{3}{26}$, 2) $\frac{1}{13}$, 3) 0, 4) $\frac{1}{26}$.

   Решение:

   Рита изымает карточку «вслепую», поэтому она может попасть в любую из букв. В надписи имеется 3 буквы «е», 2 – «а», 0 – «л» и 1 – «м», кроме того, всего букв 26. С учетом формулы 3.1 имеем:

   $$P(E) = \frac{3}{26};\ P(A) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13};\ P(L) = 0;\ P(M) = \frac{1}{26}.$$

5. Ответ: $P(A) = \frac{1}{9}$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = \frac{4}{35}$; $P(D) = 0{,}5$.

   Решение:

   Всего в колоде 36 карт: из них 18 — черных и 18 красных, по 9 каждой из 4-х мастей (пики, бубны, трефы, червы) и по 4 каждой из достоинств (4 шестерки, 4 семерки и т.д.).

Значит, $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Событие C означает, что из колоды уже извлечена одна карта, то есть

осталось 35, а т.к. это была дама, то тузов осталось 4, значит, $P(C)=\frac{4}{35}$.

Событие D означает, что колода уже лишена двух карт, то есть осталось 34, а так как вторая была пиковая, то темных карт осталось 17, поэтому

$$P(D)=\frac{17}{34}=\frac{1}{2}=0{,}5\ .$$

6. Ответ: $\frac{3}{7}$.

Решение:

Всего костяшек домино 28, сумму точек на каждой из них можно представить в виде таблицы:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2			4	5	6	7	8
3				6	7	8	9
4					8	9	10
5						10	11
6							12

Суммы точек, меньшие 6, обведены.

Менее 6 — это 0, 1, 2, 3, 4, 5, таких костяшек в наборе 12. Следовательно,

$$p=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}.$$

7. Ответ: 0,14.

Решение:

Всего в числах от 1 до 100 существует 14 чисел, делящихся на 7, значит,

$m=14$, $n=100$ $p=\frac{14}{100}=0{,}14$.

8. Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение:

Не менее 3-х пятен означает 3, 4, 5 и 6, поэтому таких щенков 4 из 6.

$$p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

9. Ответ: а) 0,5; б) 0,1; в) $\frac{8}{45}$.

Решение:

Двузначных чисел всего 90 (от 10 до 99) из них нечетных — 45, кратных 11 — 9, не превосходящих 25 (следовательно, не более 25) — 16.

а) $P(A)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}=0,5$; б) $P(B)=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}=0,1$;

в) $P(C)=\frac{16}{90}=\frac{8}{45}$.

10. Ответ: $\frac{2}{145}$.

Решение:

Выбрать из 30 щук 2 можно C_{30}^2 способами. Из меченных 12 щук выбрать 2 можно C_{12}^2 способами.

Вероятность события A — «выловленные из пруда 2 щуки оказались с метками» равна: $P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{30}^2}=\frac{22}{145}$.

11. Ответ: $\frac{1}{24}$.

Решение:

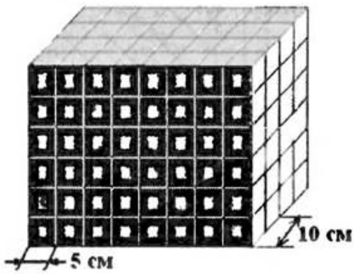
Взять 3 учебника с полки, учитывая порядок их изъятия, можно $A_4^3=4\cdot 3\cdot 2=24$ способами. Из них только раз можно взять книги в установленном порядке, поскольку их имеется по 1 экземпляру каждой

$$p=\frac{1}{24}.$$

12. Ответ: $\frac{1}{12}$.

Решение:

Найдем общее количество кубиков, полученных после распила прямоугольного параллелепипеда. Для этого найдем объем прямоугольного параллелепипеда ($V_{пар}$) и объем одного кубика ($V_{куб}$), а затем разделим $V_{пар}$ на $V_{куб}$.



$V_{пар} = 20 \times 30 \times 40 = 24000$ (см^3)

$V_{куб} = 125$ (см^3)

$$n = \frac{V_{пар}}{V_{куб}} = \frac{24000}{125} = 192 \text{ кубика.}$$

24 кубика с серой и черной гранями.
8 кубиков с серой и белой гранями.
16 кубиков с белой и черной гранями.

Итого: $p = \frac{16}{192} = \frac{1}{12}$.

Тема 4

1. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Решение:

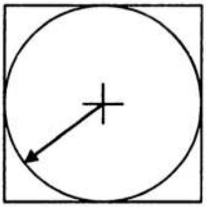


Рис. 4.4

Искомую вероятность найдем как отношение $P = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где μ_1 — площадь круга, μ_2 — площадь квадрата (рис. 4.4).

$$P = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} (\approx 0{,}785)$$

2. Ответ: $\frac{11}{18}$ $(\approx 0,61)$.

Решение:

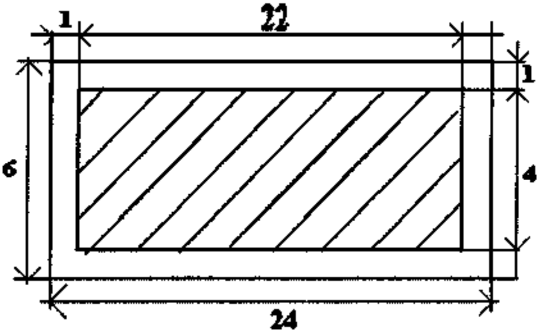


Рис. 4.5

Выделим на прямоугольнике паркетной плитки «благоприятный» прямоугольник (заштрихованный), границы которого отстоят от границ плитки на 1 см. Если исходить из того, что все точки плитки равновозможны как центр упавшей монеты, то расположение центра монеты внутри заштрихованного прямоугольника – условие расположение монеты внутри плитки. Отсюда

искомая вероятность $P = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где μ_1 — площадь внутреннего прямоугольника, μ_2 — площадь плитки.

$$P = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{4 \cdot 22}{6 \cdot 24} = \frac{11}{18} \ (\approx 0,61)$$

3. Ответ: $\frac{1}{16}$.
Решение:
Обозначим длины двух частей x и y соответственно. Очевидно, чтобы первая

часть была не менее $\frac{a}{4}$, должно выполняться неравенство $x > \frac{a}{4}$, а чтобы

при этом две другие части также были более $\frac{a}{4}$, необходимо, чтобы

выполнялось неравенство $x < \frac{a}{2}$. Получим цепочку неравенств для x:

$\frac{a}{4} < x < \frac{a}{2}$. Рассуждая подобным образом, получим для части y:
$\frac{a}{4} < y < \frac{a}{2}$.

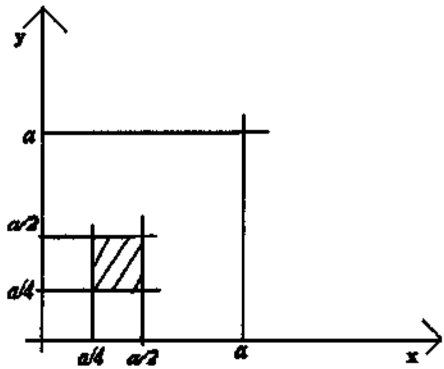


Рис. 4.6.

Введем систему координат x, y и дадим задаче геометрическую интерпретацию. Обоим неравенствам удовлетворяет заштрихованная площадь, равная

$\mu_1 = \frac{1}{16} a^2$ площади квадрата μ_2 со стороной a.

$$P = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1/16\, a^2}{a^2} = \frac{1}{16}.$$

4. Ответ: 1) толщина монеты должна составлять примерно 35% от ее диаметра;
2) толщина монеты должна составлять примерно 58% от ее диаметра.
Решение 1:
Опишем вокруг монеты воображаемый сферический мыльный пузырь. Поверхность пузыря разбита на три части: шаровой пояс толщиной H и две «шапочки». Если в момент соприкосновения с горизонтальной опорой шар коснется ее в точке на поясе, то монета упадет на ребро, в противном случае (рис. 4.7) монета упадет «плашмя», т.е. на круглое основание цилиндра.

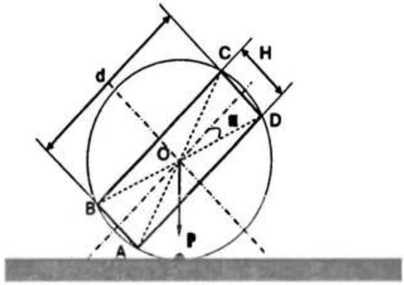


Рис. 4.7

Вероятность падения на ребро $P = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где μ_1 — площадь поверхности шарового пояса, μ_2 — площадь описанной сферы («мыльного пузыря»).

Введем H и d (*см.* рис. 4.7). Тогда радиус сферы $R = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + H^2}$,

$\mu_1 = 2\pi RH = \pi H\sqrt{d^2 + H^2}$, $\mu_2 = 4\pi R^2 = \pi(d^2 + H^2)$,

$$P = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\pi H\sqrt{d^2 + H^2}}{\pi(d^2 + H^2)} = \frac{H}{\sqrt{d^2 + H^2}} = \frac{H/d}{\sqrt{1 + \left(\frac{H}{d}\right)^2}}$$

По условию $P = \frac{\quad}{3}$, откуда

$$3H/d = \sqrt{1 + (H/d)^2},\ 9(H/d)^2 = 1 + \left(\frac{H}{d}\right)^2;\ 8(H/d)^2 = 1;\ H/d = \sqrt{\frac{1}{8}} \approx 0{,}35\ .$$

Решение 2:

Опишем окружность вокруг осевого сечения ABCD монеты, лежащую в вертикальной плоскости (рис. 4.7). Считаем, что монета падает так, что сечение ABCD не выходит из своей вертикальной плоскости. Тогда искомая вероятность

$P = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где $\mu_1 = |\widehat{AB}| + |\widehat{CD}|$, $\mu_2 = 2\pi R$. Из рис. 4.7 следует:

$$|AB| = |CD| = 2R\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + H^2}\cdot arctg\frac{H}{d} = \sqrt{d^2 + H^2}\,arctg\frac{H}{d};$$

$$P = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{2\sqrt{d^2 + H^2}\,arctg\,\frac{H}{d}}{2\cdot\frac{1}{2}\pi\sqrt{d^2 + H^2}} = \frac{2}{\pi}arctg\,\frac{H}{d};$$

$\frac{H}{d}$ найдем из условия $\frac{2}{\pi} arctg \frac{H}{d} = \frac{1}{3}$, откуда $arctg \frac{H}{d} = \frac{\pi}{6}$;

$\frac{H}{d} = tg \frac{\pi}{6} \approx 0{,}58$.

Тема 5

1. Ответ: 1) 0,14; 2) 0,15.
   Решение:

   1) Пусть событие A — извлечение первой конфеты «Аленка», $P(A) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$; пусть событие B — извлечение второй «Аленки». Если первая конфета окажется «Аленкой», то в мешке останется 29 «Аленок» и 50 «Белочек», и вероятность события B определится как $P_A(B) = \frac{29}{79}$; вероятность наступления события $C = AB$ (первые две конфеты — «Аленки») найдется по теореме умножения для зависимых событий (формула 5.1):
   $$P(C) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{29}{79} = \frac{87}{632} \approx 0{,}14.$$
   2) Пусть событие A — первая «Аленка», событие B — вторая «Белочка»; тогда $P(A) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$;

   $P_A(B) = \frac{50}{79}$; вероятность события $C = AB$ по теореме умножения для зависимых событий (формула 5.1):
   $$P(C) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{50}{79} = \frac{75}{316}.$$
   Пусть событие D — третья конфета «Белочка». Вероятность наступления этого события зависит от наступления события C, а именно, $P_C(D) = \frac{49}{78}$ если одна «Аленка» и одна «Белочка» уже ушли из мешка, то всего в мешке осталось 78 конфет, в том числе 49 «Белочек». Наступление события $E = ABC = CD$ имеет вероятность:
   $$P(E) = P(C) \cdot P_C(D) = \frac{75}{316} \cdot \frac{49}{78} = \frac{1225}{8216} \approx 0{,}15.$$

2. Ответ: 1) 0,3; 2) 0,1; не влияет.

Решение:

1) Рассмотрим события A — серая курица первой покинула курятник, $P(A)=\frac{2}{5}$, B — белая курица вышла второй. Очевидно $P(B)$ зависит от $P(A)$: $P(B)=P_A(B)=\frac{3}{4}$. Поэтому порядок AB (сперва серая, потом — белая) имеет вероятность (формула 5.1):

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

2) Рассуждая аналогично, имеем: для события A — первой вышла серая курица: $P(A)=\frac{2}{5}$; для события B — второй вышла серая курица: $P_A(B)=\frac{1}{4}$; для события C — третьей вышла белая курица имеем $P_{AB}(C)=\frac{3}{3}=1$. Для события $D=ABC$ по теореме об умножении зависимых событий получаем:

$$P(D)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

Если изменить порядок выхода первых трех кур: белая — серая — серая, то получим: $P(D)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}=0{,}1$. Как видно, ни числитель, ни знаменатель $P(D)$ не меняются, и перестановка выхода птиц из курятника на вероятность не влияет.

3. Ответ: 0,28.

Решение:

Изъятие украшения из любого сундучка — событие независимое от изъятия украшений из других сундучков. Поскольку рассчитывается вероятность того, что все вынутые изделия с сапфирами, применяем теорему умножения для независимых событий:

$$P(A)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}28.$$

4. Ответ: $\frac{925}{6468}$.

Решение:

События зависимые, поскольку при встрече любого из курсантов меняется общая численность и количество людей с определенным ростом. Применяем теорему умножения для зависимых событий:

$$P(D)=\frac{75\cdot74\cdot25}{100\cdot99\cdot98}=\frac{2775}{19404}=\frac{925}{6468}.$$

5. Ответ: 0,4.
Решение:
Пусть событие A — Ваня вымыл руки перед обедом, событие B — Петя вымыл руки перед обедов, событие C — оба вымыли руки перед обедом. По условию, $P(A)=0{,}8$; $P(AB)=0{,}32$. А так как события A и B — независимые, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, откуда $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0{,}32}{0{,}8}=0{,}4$.

Тема 6

1. Ответ: $\frac{1}{3}$.
Решение:

Всего разных наборов по две карточки C_4^2. Они составляют полную группу событий. Вероятность любого набора составляет $\dfrac{1}{6}$. Всего пар чисел, дающих четную сумму две, а именно: событие A — извлечение чисел 1 и 3, событие B — извлечение чисел 2 и 4. События A и B несовместимы (не могут произойти в одном опыте). Событие C — «сумма двух чисел четна» по определению (см) есть сумма событий A и B: $C=A+B$. По теореме о сложении для несовместимых событий $P(C)=P(A)+P(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

2 способ: Полная группа состоит из $C_4^2=6$ событий, $n=6$. благоприятных событий $m=2$. Искомая вероятность $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

2. Ответ: $\frac{1}{180}$.
Решение:
Полная группа событий состоит из всех перестановок по 4 буквы из шести: $A_6^4=6\ 5\cdot4\cdot3=360$. Вероятность любой перестановки составляет $\dfrac{1}{360}$; перестановки несовместимы, и по теореме о сложении вероятностей

для этого случая, искомая вероятность суммы событий равна сумме

вероятностей: $P = \dfrac{1}{360} + \dfrac{1}{360} = \dfrac{1}{180}$.

2 способ: Полная группа содержит $n = 360$ событий. Из них «благоприятных»

$m = 2$; искомая вероятность $P = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{360} = \dfrac{1}{180}$.

Примечание. Разница между этой задачей и примером 2 заключается в том, что в примере из шести букв: п, о, б, е, д, а, отбирают четыре без учета их последовательности, а в задаче — с учетом.

3. Ответ: 1) 0,85; 2) 0,70; 3) 0,65.

Решение:

Опыты, заключающиеся в наблюдении за падением одного яблока на определенный момент времени, несовместимы, поэтому применима теорема сложения для несовместимых событий:

1) $P = 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}85$
2) $P = 0{,}20 + 0{,}20 + 0{,}20 = 0{,}70$
3) $P = 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}65$

4. Ответ: $1 - \dfrac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$.

Решение:

Пусть A — событие, заключающееся в поимке хотя бы одной рыбы с икрой. Тогда $A = 1 - \overline{A}$, где $\overline{A}$ — событие, заключающееся в не поимке ни одной рыбы с икрой. Найдем $P(\overline{A})$. Всего возможных исходов при поимке k рыб

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. В том числе, сочетаний по k рыб без икры, тогда

$C_{n-m}^k = \dfrac{(n-k)!}{k!\cdot(n-m-k)!}$, тогда $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k} = \dfrac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$.

Искомая вероятность: $P(A) = 1 - \dfrac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$.

Для частного случая:

$$P(A) = 1 - \frac{(1000-500)!(1000-4)!}{1000!(1000-500-4)!} = 1 - \frac{500!\cdot 996!}{1000!\cdot 496!} = 1 - \frac{497\ 498}{2\ 997\ 999\ 2} = 1 - 0{,}062 = 0{,}938$$

Тема 7

1. Ответ: 0,421875.

   Решение:

   Решим задачу, опираясь на схему. Главное событие, вероятность которого нужно найти, — дождь, который идет только один день из четырех (если дождь вообще не пойдет – не будет улова, если дождь будет идти более одного дня, то улов окажется больше 15 рыб). Обозначим это событие буквой C. Введем события B_i — дождь идет только в i-й день (составные для события C), и события A_i — дождь идет в i-й день (составные для событий B_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда имеют место зависимости: $B_1 = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4$,

   $$B_2 = \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4\ ,\ B_3 = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A}_4\ ,\ B_4 = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4 .$$

   Для наступления любого из событий B_1, B_2, B_3 или B_4 (используется связь «или»), а так как эти события несовместны (сравним любые два из них), то (*см.* схему) по теореме о сложении вероятностей:

$$P(C) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = P(A_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3\ \overline{A}_4) + P(\overline{A}_1\ A_2\ \overline{A}_3\ \overline{A}_4) + P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3\ \overline{A}_4) + P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3\ A_4) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\ P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\ P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)\cdot P(\overline{A}_4) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\ P(\overline{A}_3)\cdot P(A_4) =$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

2. Ответ: 0,446.

   Решение:

   Главное событие S — победа двух гонщиков в заезде. Составные независимые события второго уровня: A — победил первый гонщик, B — победил второй гонщик, C — победил третий гонщик, из которых образованы составные несовместимые события первого уровня — D — победили первый и второй гонщики, F — победили второй и третий гонщики, G — победили первый и третий гонщики. Согласно имеющимся связям получаем: $D = AB\overline{C}$,

   $F = \overline{A}\ BC$, $G = A\overline{B}\ C$, $S = D + F + G$.

   $P(S) = 0{,}46 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}54 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}46 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}446$

3. Ответ: 0,92.

   Решение:

   Событие A — доставка письма первым голубем и событие B — доставка письма вторым голубем — события независимые (по определению) и совместимые (по определению), причем $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$. Событие C — «хотя бы один голубь доставил письмо» — сумма событий A и B: $C = A + B$ (по определению). По формуле (6.2): $P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ — для независимых событий. Имеем:

   $P(C) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 1{,}4 - 0{,}48 = 0{,}92$.

   2 способ: Воспользуемся вероятностями противоположных событий.

   Вероятность события $\bar{A}$ (первый голубь не доставил письмо):

   $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;

вероятность события $\overline{B}$ (второй голубь не доставил письмо): $P(\overline{B}) = 1 - P(B) =$ $= 1 - 0,8 = 0,2$. Вероятность произведения независимых событий $\overline{A} \cdot \overline{B}$ (оба голубя не доставили писем): $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$.
Вероятность противоположного события C (хотя бы один голубь доставил письмо): $P(C) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

Тема 8

1. Ответ: 0,85.

Решение:

Событие A — извлечен шуруп.

Гипотезы: H_1 — извлечение произведено из первой коробки;

H_2 — извлечение произведено из второй коробки.

Обе гипотезы образуют полную группу событий, поскольку больше нет вариантов извлечения шурупа, только две коробки. Для решения задачи применим формулу полной вероятности, поскольку вероятности гипотез нам известны, условные вероятности события А в предположении любой из двух гипотез также нам даны: $P(H_1) = P(H_2) = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $P_{H_1}(A) = 0,9$ (согласно классическому определению вероятности). $P_{H_2}(A) = 0,8$ (согласно классическому определению вероятности).

$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,5(0,9+0,8) =$
$= 0,5 \cdot 1,7 = 0,85$.

2. Ответ: $\dfrac{721}{1760}$.

Решение:

Событие А — вынут красный шар, гипотезы: H_1 — выбрали шар из первой урны, H_2 — выбрали шар из второй урны, H_3 — выбрали шар из третьей урны, H_4 — выбрали шар из четвертой урны.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4} = 0,25, \; P_{H_1}(A) = 0,5,$$

$$P_{H_2}(A) = 0,4, \; P_{H_3}(A) = \frac{3}{8}, \; P_{H_4}(A) = \frac{4}{1}.$$

Используя формулу полной вероятности, получим:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)=$$

$$=0{,}25\cdot 0{,}5+0{,}25\cdot 0{,}4+\frac{3}{4\cdot 8}+\frac{1}{11}=0{,}125+0{,}1+\frac{33}{352}+\frac{32}{352}=$$

$$0{,}225+\frac{65}{352}=\frac{9}{40}+\frac{65}{352}=\frac{396}{1760}+\frac{325}{1760}=\frac{721}{1760}$$

3. Ответ: 0,562.

Решение:

Введем событие A — «учительница узнала о шпаргалке», A_1 — Саша заметила шпаргалку и A_2 — Клаша заметила шпаргалку. По условию $P(A_1)=0{,}3$; $P(\overline{A}_1)=0{,}7$; $P(A_2)=0{,}8$; $P(\overline{A}_2)=0{,}2$. Возможны следующие гипотезы, образующие полную группу: $B_1=A_1A_2$ — шпаргалку заметили и Саша, и Клаша; для независимых событий $P(B_1)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24$; $B_2=A_1\overline{A}_2$ (Саша заметила, Клаша не заметила) $P(B_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06$.

Аналогично, $B_3=\overline{A}_1A_2$, $P(B_3)=P(\overline{A}_1)\ \ P(A_2)=0{,}7\ \ 0{,}8=0{,}56$ и $B_4=\overline{A}_1\overline{A}_2$; $P(B_4)=P(\overline{A}_1)\ \ P(\overline{A}_2)=0{,}7\ \ 0{,}2=0{,}14$ (контроль $0{,}24+0{,}06+0{,}56+0{,}14=1$).

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)\quad (*)$$

Согласно условию, вероятность ябеды со стороны Саши $p_1=0{,}9$, вероятность ябеды со стороны Клаши $p_2=0{,}5$. Рассмотрим $P_{B_1}(A)$ — вероятность передачи ябеды учительнице, если обе девочки знают о шпаргалке: для независимых и совместимых событий

$$P_{B_1}(A)=p_1+p_2-p_1p_2=0{,}9+0{,}5-0{,}9\ \ 0{,}5=0{,}95.$$

Из условия найдем $P_{B_2}(A)=p_1=0{,}9$; $P_{B_3}(A)=p_2=0{,}5$; $P_{B_4}(A)=0$.

Возвращаясь к формуле (*), получим
$P(A) = 0{,}24 \cdot 0{,}95 + 0{,}06 \cdot 0{,}9 + 0{,}56 \cdot 0{,}5 + 0{,}14 \cdot 0 = 0{,}562$

4. Ответ: $\dfrac{23}{60}$.

Решение:

Введем событие A — извлечение белого шара и гипотезы B_1, B_2 и B_3 — извлечение шара из 1-й, 2-й или 3-й урны. По условию $P(B_1) = p_1 = \dfrac{1}{6}$; $P(B_2) = p_2 = \dfrac{2}{6}$; $P(B_3) = p_3 = \dfrac{3}{6}$; события B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу: $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$.
Воспользуемся формулой для полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{23}{60}.$$

Тема 9

1. Ответ: $\dfrac{2}{9}$.

Решение:

Событие A — поймана белая овца, гипотезы: H_1 — перебежала белая овца, H_2 — перебежала черная овца.

$$P(H_1) = \frac{1}{5} = 0{,}2, \; P(H_2) = \frac{4}{5} = 0{,}8, \; P_{H_1}(A) = \frac{8}{1},$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{7}{1}.$$

Применяя формулу Байеса, получим:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{1}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{1}} = \frac{2}{9}.$$

2. Ответ: $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$.

Решение:

Используя формулу полной вероятности, найдем вероятность извлечения конфеты фабрики «Заря». Пусть A — событие, состоящее в извлечении конфеты фабрики «Заря», B_i — обращение к i-му ящику ($i = 1, 2, 3$). Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}4 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 = 0{,}4.$$

а) Вероятность извлечения конфеты фабрики «Заря» из первой коробки найдем по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}3}{0{,}4} = \frac{1}{4};$$

б) то же — из второй коробки:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}4}{0{,}4} = \frac{1}{3};$$

в) то же — из третьей коробки:

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}5}{0{,}4} = \frac{5}{12}.$$

Проверка: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 1$.

3. Ответ: $\frac{2}{55}; \frac{8}{55}$.

Решение:

Найдем полную вероятность извлечения латунного шарика. Если A — извлечение латунного шарика, B_i — обращение к i-му ящику, то

$P(B_i) = \dfrac{1}{10}$; $P_{B_i}(A) = \dfrac{m_i}{100}$, где m_i — число латунных шариков в i-ом ящике. $m_i = m_0 + d(i-1) = 10 + 10(i-1) = 10i$;

$P_{B_i}(A) = \dfrac{10i}{100} = 0{,}1i$. По формуле для полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot 0{,}1i = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} i = \frac{1}{100} \cdot \frac{1+10}{2} \cdot 10 = \frac{55}{100}.$$

По формуле Байеса для $i = 2$:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 0{,}1 \cdot 2}{0{,}55} = \frac{2}{55}.$$

Для $i = 8$:

$$P_A(B_8) = \frac{P(B_8) \cdot P_{B_8}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot 0{,}1 \cdot 8}{0{,}55} = \frac{8}{55}.$$

Тема 10

1. Ответ: вероятнее выиграть одну партию из двух.

   Решение:

   Решение мы найдем с помощью формулы Бернулли, поскольку исход любой партии не зависит от исходов предыдущих и не влияет на последующие (т.е. партии являются событиями независимыми относительно события A — выигрыш в партии), $P(A) = 0{,}5$, $P(\overline{A}) = 0{,}5$. Для первого случая $n = 2$, $k = 1$, для второго — $n = 4$, $k = 2$. Получаем:

   $$P_2(1) = C_2^1 0{,}5^1 0{,}5^1 = 0{,}5$$

   $$P_2(1) = C_4^{12} 0{,}5^2 0{,}5^2 = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

   Сравнивая найденные вероятности, приходим к выводу, что вероятнее выиграть одну партию из двух, чем две из четырех.

2. Ответ: 0,776.

   Решение:

   Событие A — вернули не более одной неисправной вещи. Не более одной означает — одну или ноль неисправных вещей из шести. Таким образом, наше событие A состоит из двух составных несовместимых событий – вернули одну неисправную вещь или все вещи вернули исправными. Применим теорему о сумме несовместимых событий и формулу Бернулли (для каждого из двух составных событий): $P(A) = C_6^6 0{,}85^6\ 0{,}15^0 + C_6^1 0{,}85^5\ 0{,}15^1 = 0{,}85^6 + 6\ 0{,}15\ 0{,}85^5 = 0{,}377149515625 + 0{,}39933478125 \approx 0{,}776$.

Тема 11

1. Ответ: $n > 50000$.

Решение:

Из условия следует $\left|p - \frac{m}{n}\right| \le 0{,}01$ с вероятностью 0,95 или, что то же самое, $\left|p - \frac{m}{n}\right| > 0{,}01$ с вероятностью 0,05. По формуле Чебышева (11.1):

$$P\left(\left|p - \frac{m}{n}\right| > 0{,}01\right) < \frac{p \cdot q}{a^2 \cdot n}$$; где $a = 0{,}01$, $P = 0{,}05$.

Используя оценку (11.2), имеем $\frac{p \cdot q}{a^2 \cdot n} < \frac{1}{4a^2 n}$ $< 0{,}05$, или

$\frac{1}{4 \cdot 0{,}01^2\ n} < 0{,}05$, откуда $n > 50000$.

2. Ответ: $\frac{3}{4}$.

Решение:

Воспользуемся неравенством Чебышева (11.1): $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > a\right) < \frac{p \cdot q}{a^2 \cdot n}$

В данном случае $a = 0{,}1$, $n = 100$; Вероятность $P < \frac{p \cdot q}{a^2 \cdot n}$;

Воспользовавшись оценкой (11.2), получим $P < \frac{\frac{1}{4}}{0{,}1^2 \cdot 100} = \frac{1}{4}$.

Мы получили вероятность превышения разности $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ по сравнению с 0,1. Значит, вероятность непревышения (т.е. искомая вероятность — вероятность противоположного события) составит $1 - P = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Тема 12

1. Ответ:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Контроль
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\sum p_i = \frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\ldots+\frac{1}{24}=1$

Решение:

Всего различных значений сумм может быть от 2 (выпали 2 единицы) до 10 (выпала шестерка на кубике и четверка на тетраэдре). Всего сочетаний по две цифры может быть $6 \cdot 4 = 24$ (по правилу умножения) $P(X=2)=\dfrac{1}{24}$.

Сумма $X = 3$ может быть получена как $1 + 2$ или $2 + 1$ — двумя способами (равновероятными, несовместными в одном эксперименте). Значит,

$P(X=3)=\dfrac{2}{24}$ (по теореме о сложении вероятностей). Для $X = 4$: $1 + 3$, $2 + 2$ и $3 + 1$ — три способа. $P(X=4)=\dfrac{3}{24}$. Для $X = 5$: $1 + 4$; $2 + 3$; $3 + 2$; $4 + 1$ — четыре способа. $P(X=5)=\dfrac{4}{24}$. Для $X = 6$: $1 + 5$; $2 + 4$; $3 + 3$; $4 + 2$ — четыре способа (первое слагаемое — от тетраэдра).

$P(X=6)=\dfrac{4}{24}$. Для $X = 7$: $1 + 6$; $2 + 5$; $3 + 4$; $4 + 3$ — четыре способа.

$P(X=7)=\dfrac{4}{24}$.

Для $X = 8$: $2 + 6$; $3 + 5$; $4 + 4$; $P(X=8)=\dfrac{3}{24}$; для $X = 9$: $3 + 6$; $4 + 5$;

$P(X=9)=\dfrac{2}{24}$; и, для $X = 10$ — одно сочетание $4+6$, $P(X=10)=\dfrac{1}{24}$.

Строим искомую таблицу.

2. Ответ:

X	0	1	2	3	Контроль
m	1	3	3	1	
$P=\frac{m}{n}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum p_i=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$

Решение:

Полную группу событий найдем перебором (г — герб; ц — цифра)

1-я монета	ц	ц	ц	ц	г	г	г	г
2-я монета	ц	ц	г	г	ц	ц	г	г
3-я монета	ц	г	ц	г	ц	г	ц	г

Из таблицы видно: всего элементарных событий $n=8$, в том числе, $X=0$, $m=1$; $X=1$, $m=3$; $X=2$, $m=3$; $X=3$, $m=1$.

3. Ответ:

X, кг	до 2	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)
Абсолютная частота m, штук	600	700	900	1200	1400	1500	1300
Относительная частота $w=\frac{m}{n}$	0,06	0,07	0,09	0,12	0,14	0,15	0,13
$P\approx w$	0,06	0,07	0,09	0,12	0,14	0,15	0,13

[8;9)	[9;10)	≥ 10	Контроль
1000	900	500	$\sum p_i=1$
0,1	0,09	0,05	
0,1	0,09	0,05	$\sum p_i=1$

Решение:

Значения вероятностей находим по формуле $p_i \approx w_i = \frac{m_i}{n}$. В данном случае $n=10000$; подставив значения n и w_i, получим ответ.

4. **Ответ:**

X	40	42	44	46	48	50	52	54	Проверка
$w_i = \frac{m_i}{n}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\sum w_i = 1$

Решение:

Рассмотрев исходную таблицу, замечаем, что случайная величина X — размер одежды — дискретна, принимает значения от 40 до 54, включая все промежуточные четные числа. Выписав первую строку — значения X, непосредственным подсчетом находим данные второй строки m_i — абсолютную частоту m (кропотливая работа!). Контроль: $\sum m_i = n = 50$.

X	40	42	44	46	48	50	52	54	Проверка
m	1	2	5	8	12	12	9	1	$\sum m_i = 1+2+5+\ldots+1 = 0 \ = n$
$w_i = \frac{m_i}{n}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\sum w_i = 1$

В третьей строке записываем относительную частоту каждого размера.
Сочетание первой и третьей строки дает ответ.

Тема 13

1. **Ответ:**

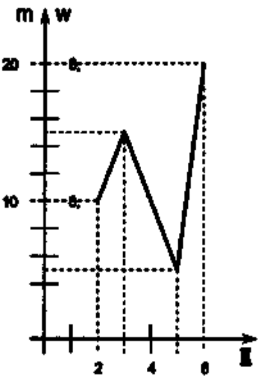


Рис. 13.4

Решение:

Строим таблицу:

X	2	3	5	6
m	10	15	5	20
$w = \frac{m}{n}$	0,2	0,3	0,1	0,4

$n = 50$. Контроль: $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 = 1$.

Строим точки ($X_i m_i$) в выбранной системе координат (X, m). Суммируя строку m, получим n = 50. Дополним исходную таблицу строкой

$w = \frac{m}{n}$ — относительных частот. Соединяя последовательно точки на графике, получаем (в разных масштабах) полигоны абсолютных и относительных частот дискретной случайной величины.

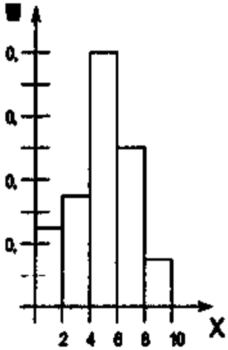


Рис. 13.5

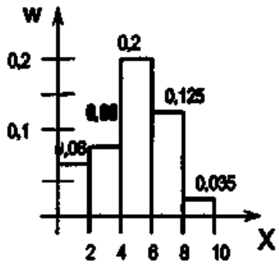


Рис. 13.6

2. Ответ:

Решение:

Выбираем промежутки h = 2 мин. Строим таблицу распределения непрерывной случайной величины X (продолжительность песен) по абсолютной частоте m их исполнения (первые две строчки таблицы). В третьей строке

записываем относительную частоту исполнения песен $w = \frac{m}{100}$

(контроль $0{,}12 + 0{,}16 + 0{,}40 + 0{,}25 + 0{,}07 = 1$). Используя 1 и 3 строчки таблицы, строим гистограмму относительной частоты $X - w$ (рис. 13.5). Рассчитаем

четвертую строку таблицы $\frac{w}{h}$ — плотность относительной частоты и строим

гистограмму $X - \frac{w}{h}$ (рис. 13.6). Найдем площадь последней гистограммы

$S = 2 \cdot 0{,}06 + 2 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}200 + 2 \cdot 0{,}0125 + 2 \cdot 0{,}035 = 1.$

X, мин	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10]
m, штук	12	16	40	25	7
$w = \dfrac{m}{100}$	0,12	0,16	0,40	0,25	0,07
$\dfrac{w}{h}$	0,060	0,080	0,200	0,125	0,035

3. Ответ: а) 0,28 (или 28%); б) 0,65 (или 65%).

Решение:

Относительная частота исполнения песен от 0 до 2 минут равна площади прямоугольника, соответствующего плотности относительной частоты [0; 2] (рис. 13.6) Частота исполнения песен продолжительностью от 2 до 4 минут равна площади соседнего прямоугольника, соответствующего относительной частоте [2; 4] Всего относительная частота исполнения песен длительностью от 0 до 4 минут равна сумме площадей двух указанных прямоугольников, или $w(0; 4) = w(0; 2) + w(2; 4) = 2\cdot 0,06 + 2\cdot 0,08 = 0,28$ (или 28%).

Аналогично найдем относительную частоту исполнения песен продолжительностью от 4 до 8 минут как суммарную площадь прямоугольников с основаниями [4; 6) и [6; 8), (рис. 12.6), или $w[4; 6) + w[6; 8) = 2\cdot 0,200 + 2\cdot 0,125 = 0,65$ (или 65%).

Тема 14

1. Ответ: X, Me, Mo, R.

Решение:

Воспользовавшись определениями, получим, что в скобках следует последовательно записать: а) среднее арифметическое, X; б) среднее значение двух рядом стоящих в середине чисел, то есть медиана, Me; в) самое распространенное число ряда, то есть мода, Mo; г) разность между наибольшим и наименьшим числами, то есть размах, R.

2. Ответ: а) 5; б) $\frac{13}{32}$.

Решение:

а) Упорядоченный ряд: 2, 4, 5, 8, 9.

5 — медиана по определению — срединное число упорядоченного ряда с нечетным количеством элементов.

б) Приведем дроби к одинаковому знаменателю:

$$\frac{10}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{7}{16},\ \frac{10}{16}.$$

Упорядоченный ряд: $\frac{4}{16},\ \frac{6}{16},\ \frac{7}{16},\ \frac{10}{16}.$

Так как ряд содержит четное число элементов, то медианой является среднее

арифметическое дробей $\frac{6}{16}$ и $\frac{7}{16}$: $\left(\frac{6}{16}+\frac{7}{16}\right):2=\frac{13}{32}$.

3. Ответ: 22 612; 5821.

Решение:

Среднее арифметическое:

(24 532 + 18 711 22 871 + 24 334) : 4 = 90 448 : 4 = 22 612.

Размах: 24532 – 18711 = 5821.

4. Ответ: 3,8; 4; 4.

Решение:

Составим таблицу частот

Отметка	«2»	«3»	«4»	«5»
Частота	1	3	4	3

Всего получено 11 отметок.

Среднее арифметическое:

$(2\ 1+3\ 3+4\ 4+5\ 3)\ 11=42\ \ 11\approx 3{,}8$.

Мода равна 4, т.к. это наиболее часто встречающаяся отметка.

Для нахождения медианы выпишем упорядоченный ряд одиннадцати отметок: 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5. Так как число элементов ряда нечетно, то медианой является элемент, стоящий от начала и конца ряда на одинаковом расстоянии — шестой элемент, т.е. 4.

5. Ответ: 1) $X = 2{,}53$; $Me = 3$; $Mo = 3$; $R = 4$; 2) $X = 3{,}17$; $Me = 3$; $Mo = 3$; $R = 6$.

Решение:

Построим вариационный ряд: 1, 2, 3, 3, 3, 5. Он содержит шесть элементов.

Среднее арифметическое: $X=\frac{1+2+3+3+3+5}{6}=2{,}83$. Медиана:

$Me = 3$; мода: $Mo = 3$; размах $R = 5 - 1 = 4$.

Если заменить число 5 на 7, получим ряд 1, 2, 3, 3, 3, 7. При этом мода (наиболее часто встречающееся чило) и медиана (среднее двух рядом стоящих в середине ряда чисел) не изменятся. Новые значения получат размах и среднее арифметическое: $R = 7 - 1 = 6$.

6. Ответ: а) 1,9; б) 2; в) 2;

г)

Затрачиваемое время, X	0 ч	1 ч	2 ч	3 ч	4 ч
Частота, m	2	5	7	5	1

Решение:

а) Среднее арифметическое:

$(0\cdot 2+1\ \ 5+2\cdot 7+3\cdot 5+4\cdot 1):20=38:20=1{,}9$.

б) Выпишем в упорядоченный ряд все значения:

0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4.

в) Медианой будет являться среднее арифметическое 10-го и 11-го элементов. Это — 2.

Затрачиваемое время, X	0 ч	1 ч	2 ч	3 ч	4 ч
Частота, m	2	5	7	5	1

7. Ответ: 5,1.

Решение:

1) Контроль $0,3 + 0,1 + 0,2 + 0,4 = 1$.

2) $MX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 2\ \ 0,3 + 5\ \ 0,1 + 6\ \ 0,2 + 7\ \ 0,4 = 5,1$

Тема 15

1. Ответ:3; 1,3.

Решение:

Вычислим среднее арифметическое опозданий:

$$a = \frac{2+3+4+5+4+2+1}{7} = 3$$

Промежуточные результаты можно оформить в таблице:

x	$\lvert x - a\rvert$	$\lvert x - a\rvert^2$
2	1	1
3	0	0
4	1	1
5	2	4
4	1	1
2	1	1
1	2	4
		$\sum \lvert x - a\rvert^2 = 12$

Найдем дисперсию как среднее арифметическое квадратов отклонений

$D = \dfrac{\sum \lvert x - a\rvert^2}{n}$, где n – количество значений величины x. $D = \dfrac{12}{7}$.

Значит, среднее квадратичное отклонение для опозданий

$$\sigma = \sqrt{\frac{12}{7}} \approx 1,3\ .$$

2. Ответ: 20; 0,5; 60%; 20%.

Решение:

Упорядочим заданный ряд чисел: 19,1; 19,2; 19,4; 19,6; 19,6; 19,7; 19,8; 19,8; 19,9; 20,0; 20,1; 20,1; 20,1; 20,2; 20,3; 20,3; 20,5; 20,5; 20,5; 21,3.

а) Средняя длина кирпича равна:

$$\frac{19{,}1+19{,}2+19{,}4+19{,}6\cdot 2+19{,}7+19{,}8\cdot 2+19{,}9+20{,}0+20{,}1\cdot 3+20{,}2+20{,}3\cdot 2+20{,}5\cdot 3+21{,}3}{20}=20{,}0$$

б) Выпишем в строчку модули отклонения от среднего значения: 0,5; 0,1; 1,3; 0,3; 0,2; 0,8; 0,1; 0,4; 0,2; 0; 0,5; 0,3; 0,1; 0,5; 0,4; 0,1; 0,6; 0,2; 0,9; 0,3 (*). Возведем последовательно эти числа в квадрат: 0,25; 0,01; 1,69; 0,9; 0,04; 0,64; 0,01; 0,16; 0,04:0,025; 0.09; 0,01; 0,25; 0,16; 0,01; 0,36; 0,04; 0,81; 0,09. Вычислим дисперсию как среднее арифметическое чисел последнего ряда:

$$D=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}.$$

Тогда среднеквадратичное отклонение $\sigma=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

в) Отклонение длины каждого кирпича от среднего значения выписано в ряде (*). Считаем количество значений указанного ряда больше 0,2. Их — 12.

Всего значений 20. Легко высчитаем нужный процент: $\frac{12}{20}\cdot 100\%=60\%$

Теперь подсчитаем количество значений ряда (*), больших $\sigma=0{,}5$. Их — 4. Следовательно, процент кирпичей, длина которых больше среднего на 0,5:

$$\frac{4}{20}\cdot 100\%=20\%.$$

3. Ответ: а) пчелы первого улья работают стабильнее; б) 0,116 и 0,16.

Решение:

а) 1) Средняя масса меда за декаду (10 дней) для 1-го улья: $a_1=\frac{\sum x_1}{n}$ или

$$a_1=\frac{11{,}4+12+11{,}5+11{,}7+11+10{,}6+13{,}1+12{,}8+11{,}9+13+12{,}5+12{,}9+11{,}6+12}{14}=12.$$

Отклонения $|a_1 - x_i|$: 0,6; 0; 0,5; 0,3; 1; 0,4; 1,1; 0,8; 0,1; 1; 0,5; 0,9; 0,4; 0.

Квадраты отклонений: 0,36; 0; 0,25; 0,09; 1; 0,16; 1,21; 0,64; 0,01; 1; 0,25; 0,81; 0,16; 0.

Дисперсия:

$$\frac{\sum|a_1-x_i|^2}{n_1}=D_1=\frac{0{,}36+0{,}25+0{,}09+1+0{,}161{,}21+0{,}64+0{,}01+1+0{,}25+0{,}81+0{,}16}{14}=\frac{5{,}94}{14}\approx 0{,}42.$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma_1=\sqrt{D_1}=\sqrt{0{,}42}\approx 0{,}65$.

б) Средняя масса меда за декаду для второго улья:

$$a_2 = \frac{11{,}9+10{,}8+13{,}2+12{,}6+11{,}1+11{,}4+13{,}2+12{,}9+13{,}5+10{,}9+12{,}3+11{,}7+12+10{,}5}{14} = 12.$$

Отклонения: 0,1; 1,2; 1,2; 0,6; 0,9; 0,6; 1,2; 0,9; 1,5; 1,1; 0,3; 0,3; 0; 1,5.
Квадраты отклонений: 0,01; 1,44; 1,44; 0,36; 0,81; 0,36; 1,44; 0,81; 2,25; 1,21; 0,09; 0,09; 0; 2,25.
Дисперсия:

$$D_2 = \frac{0{,}01+1{,}44+1{,}44+0{,}36+0{,}81+0{,}36+1{,}44+0{,}81+2{,}25+1{,}21+0{,}09+0{,}09+2{,}25}{14} = \frac{12{,}56}{14} \approx 0{,}89.$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{0{,}89} \approx 0{,}95$.
Вывод: пчелы первого улья работают стабильней.
б) С 19 по 28 августа:

	1-й улей	2-й улей
Всего добыто (в кг)	11,6	12
Пчел	100	75
Добыто в среднем от одной пчелы (кг)	0,116	0,16

Список литературы

1. *Алгебра* и начала анализа: Учеб. для 10 класса общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. — 5-е изд., доп. — М.: Просвещение, 2006. — 432 с.
2. *Башмаков М.И.* Математика, 10, 11. — М.: Мнемозина, 2002. — 403 с.
3. *Бродский И.Л., Литвиненко Р.А.* Вероятность и статистика. 7–9 классы. Решение задач из учебников под редакцией Г.В. Дорофеева. — М.: АРКТИ, 2006. — 88 с.
4. *Виленкин Н.Я. и др.* Алгебра и математический анализ. 11 кл. — М.: Мнемозина, 2002. — 288 с.
5. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1969. — 328 с.
6. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — 479 с.
7. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — 400 с.
8. *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др.* Математика, 7 класс. — М.: Дрофа, 1999.
9. *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др.* Математика, 8 класс. — М.: Дрофа, 1999.
10. *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др.* Математика, 9 класс. — М.: Дрофа, 1999.
11. *Зотиков С.В., Зотикова Н.Н.* Задачник-практикум по теории вероятностей: Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета Мурманского государственного педагогического университета. — Мурманск: МГПУ, 2003. — 45 с.
12. *Локоть Н.В.* Математика: Учебно-методическое пособие для студентов гуманитарных факультетов МГПУ. — Часть 3: Элементы теории вероятностей и математической статистики. — Мурманск: МГПУ, 2004. — 68 с.

13. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10 кл. — М.: Мнемозина, 2005. — 408 с.
14. *Нелин Е.П., Долгова О.Е.* Алгебра и начала анализа, 11 класс. — Х.: Мир детства, 2006. — 416 с.
15. *Шкиль М.И. и др.* Алгебра и начала анализа. 11 кл. — К.: Зодиак-ЕКО, 2003. — 400 с.

Школьное образование

И.Л. Бродский, О.С. Мешавкина

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА
10–11 классы
Планирование и практикум

Пособие для учителя

Главный редактор	*И.Ю. Синельников*
Ответственный за выпуск	*В.Е. Дрёмин*
Корректор	*Ю.В. Петрова*
Верстка	*И.Л. Бродский*
Оформление обложки	*Е.В. Мельникова*

Подписано к печати 21.08.2009
Формат 60×90/16. Объем 6,5 п.л.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1
Тираж 1500 экз. Заказ № 450.

Налоговая льгота
(Постановление Правительства РФ № 41 от 23.01.03

Издательство «АРКТИ»
125212, Москва, Головинское шоссе, д. 8, корп. 2
Тел.: (495) 742-18-48

Отпечатано в ОАО «Домодедовская типография».
г. Домодедово, Каширское ш., д. 4, к. 1.

Издательство «АРКТИ» представляет литературу по основным направлениям школьного образования

...просам приобретения
...ратуры обращайтесь по адресу:
...12, Москва, а/я 61
... (495) 742-18-48
...: (495) 452-29-27
www.arkty.ru E-mail: arkty@arkty.ru

9 785894 157610